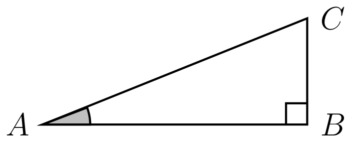
Chapitre 2

Trigonométrie

2.1 Précédemment…

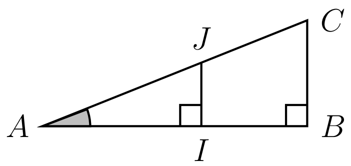
Le **cosinus d'un angle aigu** fut tout d'abord introduit comme rapport de longueurs dans un triangle rectangle. Prenons l'exemple du triangle ABC rectangle en B, représenté ci-dessous :



On pose alors :

$$\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \frac{\text{longueur du côté adjacent à } \widehat{BAC}}{\text{longueur de l'hypoténuse}} = \frac{AB}{AC}.$$

Prenons maintenant deux points I et J, situés respectivement sur $[AB]$ et $[AC]$ de sorte que (IJ) soit parallèle à (BC).



En vertu du théorème de Thalès :

$$\frac{AI}{AB} = \frac{AJ}{AC} \iff \frac{AI}{AJ} = \frac{AB}{AC} \iff \cos\left(\widehat{IAJ}\right) = \cos\left(\widehat{BAC}\right).$$

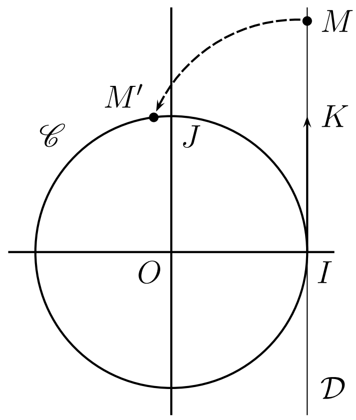
Ainsi, le cosinus dépend uniquement de la mesure de l'angle et non des triangles considérés. C'est pourquoi on parlera dorénavant du *cosinus d'un nombre réel*. Afin d'adopter une représentation simplifiée, on se placera dans le cadre d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse mesure 1 unité de longueur. C'est l'objet du **cercle trigonométrique**.

2.2 Le cercle trigonométrique

Définition 2.1. *Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;I\,;J)$. Le* ***cercle trigonométrique*** *est le cercle de centre O et de rayon 1.*

Notons $\mathcal{D}$ la tangente au cercle trigonométrique passant par le point I et K le point de $\mathcal{D}$ de coordonnées $(1\,;1)$. Le couple $(I\,;K)$ définit alors un repère de $\mathcal{D}$.
Par le procédé de l'enroulement de $\mathcal{D}$ autour du cercle :

- à tout point M de $\mathcal{D}$, d'abscisse x, correspond un point M' du cercle;
- tout point du cercle est associé à une infinité de points de $\mathcal{D}$.

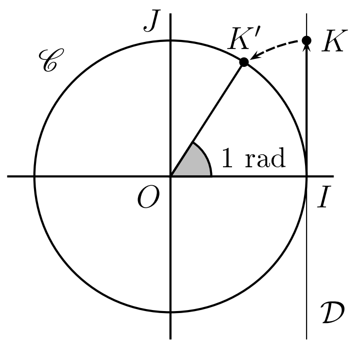


Propriété 2.1. *Soient x un nombre réel et M le point du cercle trigonométrique associé à x. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le point M est associé au nombre réel $x + k \times 2\pi$.*

2.3 Radians

Définition 2.2. *Soient A et B deux points du cercle trigonométrique. La mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$ est la mesure la longueur de l'arc de cercle $\widehat{AB}$.*

Par enroulement de la droite, l'arc $\widehat{IK'}$ a pour longueur 1.



Propriété 2.2. *La mesure d'un angle géométrique en radians est proportionnelle à sa mesure en degrés. En particulier :*

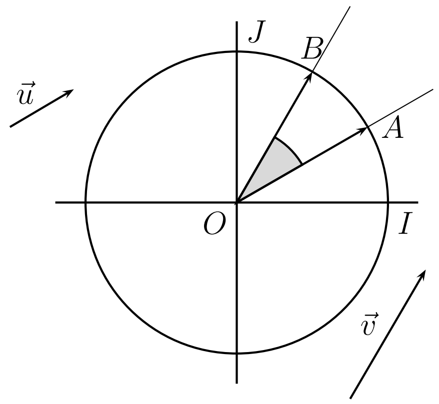
Mesure en degrés	*0*	*30*	*45*	*60*	*90*	*180*
Mesure en radians	*0*	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π

★ Vidéo.

2.4 Angles orientés

Dans toute cette partie, on suppose le plan muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$. On note $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.

Définition 2.3. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. La demi-droite d'origine O, dirigée par $\vec{u}$ (respectivement $\vec{v}$) coupe $\mathscr{C}$ en A (respectivement B).* ***L'angle orienté*** $(\vec{u}\,;\vec{v})$ *est le couple* $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$.

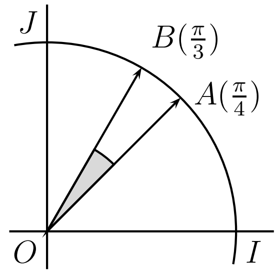


Définition 2.4. *Soient a et b deux nombres réels, on note A et B leurs images respectives sur le cercle trigonométrique. Les* ***mesures*** *en radians de l'angle orienté* $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$ *sont les réels* $b-a+k\times 2\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$.

Exemple :
On considère les points A et B associés aux réels $a=\dfrac{\pi}{4}$ et $b=\dfrac{\pi}{3}$. Par définition, les mesures de l'angle orienté $\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)$ sont les réels :

$$b-a+2k\pi=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}+2k\pi=\frac{\pi}{12}+2k\pi.$$

où $k\in\mathbb{Z}$.



Par abus d'écriture, on confondra un angle orienté avec ses mesures. On écrira ainsi :

$$\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right)=\frac{\pi}{12}+2k\pi=\frac{\pi}{12}\ [2\pi].$$

Propriété 2.3. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. L'angle orienté $(\vec{u}\,;\vec{v})$ admet une unique mesure appartenant à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$. On l'appelle* ***mesure principale*** *de $(\vec{u}\,;\vec{v})$.*

★ Vidéo.

Exemple : Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $(\vec{u}\,;\vec{v})=\dfrac{15\pi}{2}\ [2\pi]$.

Méthode constructive : On cherche l'unique $k\in\mathbb{Z}$ tel que :

$$\frac{15\pi}{2}+2k\pi\in]-\pi\,;\pi].$$

On résout donc l'inéquation :

$$\begin{aligned}-\pi<\frac{15\pi}{2}+2k\pi&\leq\pi\\-1<7,5+2k&\leq 1\\-8,5<2k&\leq -6,5\\-4,25<k&\leq -3,25.\end{aligned}$$

L'unique valeur de k correspondante est -4. La mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$ vaut donc :

$$\frac{15}{2}\pi - 4 \times 2\pi = -\frac{\pi}{2}.$$

Méthode intuitive : On écrit :

$$2\pi = \frac{4\pi}{2}.$$

On recherche alors le multiple de $\frac{4\pi}{2}$ le plus proche de $\frac{15\pi}{2}$. On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{15\pi}{2} &= \frac{16\pi}{2} - \frac{\pi}{2}\\ &= 8\pi - \frac{\pi}{2}\\ &= -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].\end{aligned}$$

Méthode systématique : On observe que :

$$7\pi < \frac{15}{2}\pi \leq 9\pi.$$

En soustrayant 8π, on obtient :

$$-\pi < -\frac{\pi}{2} \leq \pi.$$

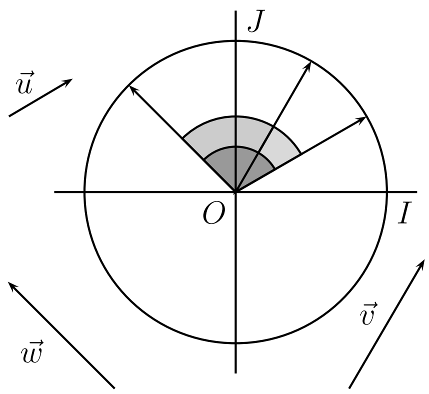
La valeur encadrée est bien dans l'intervalle désiré et mesure bien l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$ puisque l'on a soustrait $4\times 2\pi$. Plus généralement, cette méthode consiste à encadrer la mesure initiale dans un intervalle de la forme $]a\pi\,;b\pi]$ où a et b sont deux entiers impairs consécutifs. Il reste alors à ajouter un multiple de 2π pour se ramener à l'intervalle $]-\pi\,;\pi]$.

Propriété 2.4. *(relation de Chasles) Soient $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs non nuls du plan. On a :*

$$(\vec{u}\,;\vec{v}) + (\vec{v}\,;\vec{w}) = (\vec{u}\,;\vec{w})\ [2\pi].$$

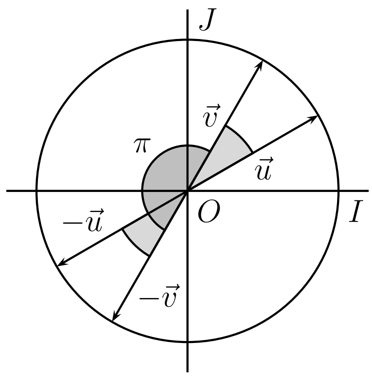
★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

Remarque : cela se voit sur la figure ci-contre où l'angle gris foncé est la somme des deux gris clairs.



Corollaire 2.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On a :*

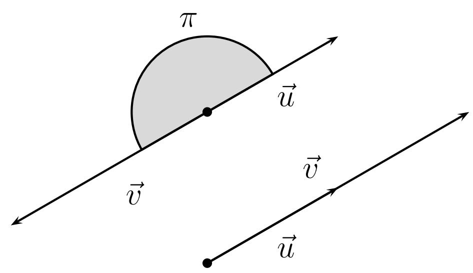
1. $(\vec{v}\,;\vec{u}) = -(\vec{u}\,;\vec{v})\ [2\pi]$
2. $\left(\vec{u}\,;\vec{-v}\right) = (\vec{u}\,;\vec{v}) + \pi\ [2\pi]$
3. $\left(\vec{-u}\,;\vec{-v}\right) = (\vec{u}\,;\vec{v})\ [2\pi]$



2.5 Interprétation géométrique

Propriété 2.5. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si :*

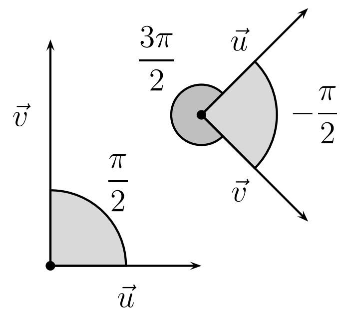
$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = 0\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\vec{u}\,;\vec{v}) = \pi\ [2\pi].$$



Définition 2.5. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On note $\mathcal{D}_{\vec{u}}$ et $\mathcal{D}_{\vec{v}}$ les droites respectivement dirigées par $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On dit que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont* ***orthogonaux*** *si les droites $\mathcal{D}_{\vec{u}}$ et $\mathcal{D}_{\vec{v}}$ sont perpendiculaires.*

Propriété 2.6. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si :*

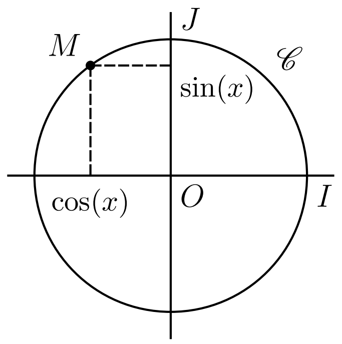
$$(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \quad \text{ou} \quad (\vec{u}\,;\vec{v}) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi].$$



2.6 Sinus et cosinus d'un nombre réel

Définition 2.6. *Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;I\,;J)$. Pour tout réel x, on considère son image M sur le cercle trigonométrique :*

- *le* ***cosinus*** *du réel x, noté $\cos(x)$ est l'abscisse du point M ;*
- *le* ***sinus*** *du réel x, noté $\sin(x)$ est l'ordonnée du point M.*



Propriété 2.7. *Pour tout nombre réel x, on a :*

1. $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ *et* $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ *;*
2. $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

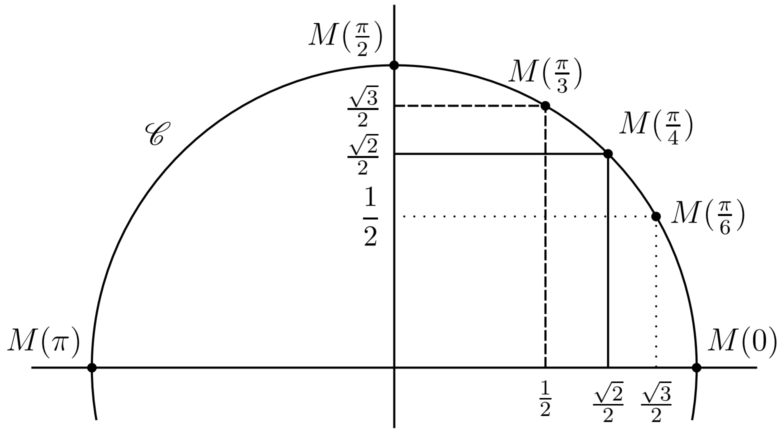
Exemple : Soit x un nombre réel tel que $\cos(x) = 0,8$ et $-\pi \leq x \leq 0$. Que vaut $\sin(x)$?

On sait que : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$. On en déduit que : $\sin^2(x) = 0,36$. Donc $\sin(x) = 0,6$ ou $\sin(x) = -0,6$. Or, pour tout $x \in [-\pi\,;0]$: $\sin(x) \leq 0$. Finalement, $\sin(x) = -0,6$.

Exemples : Les valeurs usuelles ci-dessous sont à connaître :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0

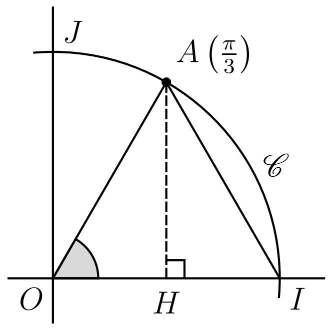
★ Vidéo.



Démonstration. (partielle) On cherche à montrer que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Soit le point A, image du réel $\frac{\pi}{3}$ sur le cercle trigonométrique. On a $OA = OI = 1$, le triangle OAI est donc isocèle en O. Cela implique que les angles géométriques $\widehat{OAI}$ et $\widehat{OIA}$ sont de même mesure. On en déduit que chacun des angles de OAI mesure $\frac{\pi}{3}$ radians.



Il s'agit donc d'un triangle équilatéral. Notons H le pied de la hauteur issue du sommet A. OAI étant isocèle en A, on en déduit que H est le milieu de $[OI]$, d'où $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = OI = \frac{1}{2}$.

Le triangle OAH est rectangle en H, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$$OA^2 = OH^2 + HA^2$$
$$1 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right)$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4}$$
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{car} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) > 0.$$

□

2.7 Équations trigonométriques

Propriété 2.8. *Soient a et x deux nombres réels. On a :*

1. $\cos(x) = \cos(a) \iff x = a\ [2\pi]$ *ou* $x = -a\ [2\pi]$ *;*
2. $\sin(x) = \sin(a) \iff x = a\ [2\pi]$ *ou* $x = \pi - a\ [2\pi]$.

★ Vidéo.

Exemples

1. Résoudre : $\cos(x) = \dfrac{1}{2}$.

   Cette équation est équivalente à : $\cos(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$. D'après la propriété précédente, les solutions de cette équation sont les réels x tels que : $x = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$.

2. Résoudre :

$$\sin(3x) = -\frac{\sqrt{2}}{2}. \qquad (E)$$

   On a :

$$\begin{aligned}(E) &\iff \sin(3x) = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\ &\iff 3x = -\frac{\pi}{4}\ [2\pi] \quad (E_1) \qquad \text{ou} \qquad 3x = \pi + \frac{\pi}{4}\ [2\pi]. \quad (E_2)\end{aligned}$$

   On résout séparément (E_1) :

$$\begin{aligned}(E_1) &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } 3x = -\frac{\pi}{4} + k \times 2\pi\\ &\iff \text{il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } x = -\frac{\pi}{12} + k \times \frac{2\pi}{3}\\ &\iff x = -\frac{\pi}{12}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right].\end{aligned}$$

   On résout (E_2) de la même manière, finalement :

$$(E) \iff x = -\frac{\pi}{12}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right] \ \text{ ou } \ x = \frac{5\pi}{12}\ \left[\frac{2\pi}{3}\right].$$

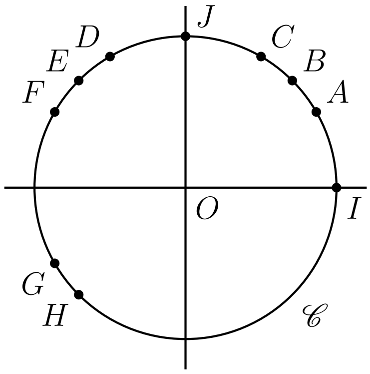
2.8 Exercices

2.8.1 Démarrage

Exercice 2.1. Compléter le tableau suivant :

Mesure en degrés	0		45	60			135	180		360
Mesure en radians		$\frac{\pi}{6}$			$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$			$\frac{3\pi}{2}$	

Exercice 2.2. Reconnaître les angles (en radians) associés aux points sur le cercle ci-dessous.



Exercice 2.3. Construire sur le cercle trigonométrique (que l'on aura préalablement construit) les angles $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$.

Exercice 2.4. Déterminer la mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$ lorsque celui est à :

$$\frac{12\pi}{5},\quad \frac{-7\pi}{2},\quad \frac{-8\pi}{6},\quad \frac{20\pi}{3}.$$

Exercice 2.5. Déterminer $(\vec{u}\,;\vec{w})$ sachant que :

1. $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{2}$ et $(\vec{v}\,;\vec{w}) = \frac{\pi}{4}$.
2. $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ et $(\vec{v}\,;\vec{w}) = \frac{\pi}{6}$.

Exercice 2.6. Sachant que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{\pi}{5}$ déterminer :

$$(\vec{v}\,;\vec{u}),\quad (\vec{u}\,;-\vec{v})\quad (-\vec{u}\,;-\vec{v}).$$

Exercice 2.7. Sachant que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{7\pi}{5}$ et $(\vec{v}\,;\vec{w}) = -\frac{2\pi}{5}$, que peut-on dire de $(\vec{u}\,;\vec{w})$?

Exercice 2.8. Sachant que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \frac{3\pi}{4}$ et $(\vec{v}\,;\vec{w}) = -\frac{\pi}{4}$, que peut-on dire de $(\vec{u}\,;\vec{w})$?

Exercice 2.9. Calculer $\cos^2\left(\frac{\pi}{100}\right) + \sin^2\left(\frac{\pi}{100}\right)$.

Exercice 2.10. Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$$\cos(x) - 1 = 0,\quad \sin(x) + 1 = 0,\quad 2\sin(x) - \sqrt{2} = 0,\quad 2\cos(x) - \sqrt{2} = 0.$$

2.8.2 Approfondissement

Exercice 2.11. Construire sur le cercle trigonométrique (que l'on aura préalablement construit) les angles $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{3}$, et $\frac{5\pi}{6}$.

Exercice 2.12. Construire sur le cercle trigonométrique (que l'on aura préalablement construit) l'ensemble des x tel que

1. $0 \leq \sin(x) \leq \frac{1}{2}$.
2. $0 \leq \cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.
3. $\frac{1}{2} \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2.13. Déterminer la mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$ lorsque celui est à :

$$\pi, \quad -5\pi, \quad \frac{-34\pi}{8}, \quad \frac{18\pi}{3}.$$

Exercice 2.14. [Gastronomie] Un dangereux végan tente de convertir sept amis au végétalisme ; pour cela il leur prépare une pizza végétalienne avec moult garniture tant et si bien qu'elle devrait faire 2 cm d'épaisseur pour 10 cm de rayon. La pizza sera donc divisé en huit parts égales.

1. Quel est l'angle en radian d'une part de gâteau ?
2. Calculer l'aire d'une part, en déduire son volume.
3. (*) Deux amis supplémentaires font leur apparition et ma pizza doit donc être divisée en dix parts égales. Quel doit être son rayon pour que chaque personne ait le même volume de pizza que s'ils avaient été huit sachant que l'épaisseur de la pizza reste de 2 cm ?

Exercice 2.15. [Algorithme] On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Algorithme

```
Données : x ∈ ℝ
Début
    Si x ≥ 0 Alors
        Tant que x > π Faire
            x ⟵ x − 2π
        FinTq
    FinSi
    Sinon Si x < 0 Alors
        Tant que x ≤ −π Faire
            x ⟵ x + 2π
        FinTq
    FinSi
    Sorties : x
Fin
```

1. Quel nombre l'algorithme affiche-t-il en sortie pour $x = \frac{11\pi}{4}$? – et pour $x = -\frac{5\pi}{4}$?
2. Quel est le rôle de cet algorithme ?

3. Le programmer sur Python et le tester avec les deux valeurs ci-dessus puis l'utiliser avec $\dfrac{-21\pi}{5}$ et $\dfrac{36\pi}{7}$.

Exercice 2.16. Déterminer $(\vec{u}\,;\vec{w})$ sachant que :

1. $(4\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $(\vec{v}\,;2\vec{w}) = -\dfrac{\pi}{4}$.
2. $(-8\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $(\vec{v}\,;3\vec{w}) = \dfrac{6\pi}{7}$.
3. $(-\vec{u}\,;3\vec{v}) = \dfrac{5\pi}{4}$ et $(2\vec{w}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{10}$.
4. $(-\vec{v}\,;\vec{u}) = \dfrac{3\pi}{14}$ et $(\vec{w}\,;-6\vec{v}) = -\dfrac{2\pi}{7}$.

Exercice 2.17.

1. Sachant que $\cos(x) = 0,6$, déterminer les valeurs possibles de $\sin(x)$.
2. Sachant que $\sin(x) = 0,6$, déterminer les valeurs possibles de $\cos(x)$.
3. Sachant que $\sin(x) = \dfrac{1}{4}$ et que $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, déterminer les valeurs possibles de $\cos(x)$.
4. Sachant que $\cos(x) = \dfrac{3}{7}$ et que $x \in [0\,;\pi]$, déterminer les valeurs possibles de $\sin(x)$.
5. Sachant que $\cos(x) = \dfrac{3}{7}$ et que $x \in [-3\pi\,;-2\pi]$, déterminer les valeurs possibles de $\sin(x)$.

Exercice 2.18. Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$$2\sin(x) = \sqrt{3}, \quad -2\cos(x) = 1, \quad (2\cos(x) - 1)\sin(x) = 0, \quad \cos(x)(\sin(x) + 1) = 0,$$
$$(\sqrt{2}\sin(x) - 1)\sin(x) = 0, \quad \cos^2(x) + \cos(x) = 0.$$

Exercice 2.19. Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes dans $[-\pi\,;\pi[$:

$$2\sin(x) \leq \sqrt{3}, \quad -2\cos(x) \leq 1, \quad 2\cos(x) - 1 > 0, \quad \cos(x)\sin(x) + 1 > 0,$$
$$(\sqrt{2}\sin(x) - 1)\sin(x) \leq 0, \quad \cos^2(x) + \cos(x) < 0.$$

2.8.3 Entraînement

Exercice 2.20. Construire sur le cercle trigonométrique (que l'on aura préalablement construit) les angles $\dfrac{-\pi}{4}$, $\dfrac{-3\pi}{4}$, $\dfrac{-\pi}{3}$, $\dfrac{-2\pi}{3}$, $\dfrac{-\pi}{6}$ et $\dfrac{-5\pi}{6}$.

Exercice 2.21. Construire sur le cercle trigonométrique (que l'on aura préalablement construit) l'ensemble des x tel que

1. $0 \leq \cos(x) \leq \dfrac{1}{2}$.
2. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \sin(x) \leq \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
3. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq \cos(x) \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercice 2.22. Déterminer la mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$ lorsque celui est à :

$$-\pi, \quad 6\pi, \quad \frac{-67\pi}{10}, \quad \frac{29\pi}{5}, \quad \frac{-58\pi}{20}, \quad \frac{19\pi}{4}.$$

Exercice 2.23. Sachant que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$ déterminer :

$$(\vec{v}\,;\vec{u})\,, \quad (\vec{u}\,;-\vec{v}) \quad (-\vec{u}\,;-\vec{v})\,.$$

Exercice 2.24. Déterminer $(\vec{u}\,;\vec{w})$ sachant que :

1. $(\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $(\vec{v}\,;\vec{w}) = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $(5\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{3}$ et $(\vec{v}\,;3\vec{w}) = \dfrac{\pi}{6}$.
3. $(-\vec{u}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{4}$ et $(2\vec{w}\,;\vec{v}) = \dfrac{\pi}{5}$.
4. $(-\vec{u}\,;-5\vec{v}) = \dfrac{3\pi}{5}$ et $(-\vec{w}\,;3\vec{v}) = \dfrac{2\pi}{7}$.

Exercice 2.25.

1. Déterminer la valeur de $\cos^2\left(\dfrac{77\pi}{128}\right) + \sin^2\left(\dfrac{77\pi}{128}\right)$.
2. Sachant que $\cos(x) = 0,4$, déterminer les valeurs possibles de $\sin(x)$.
3. Sachant que $\sin(x) = 0,3$, déterminer les valeurs possibles de $\cos(x)$.
4. Sachant que $\sin(x) = \dfrac{1}{3}$ et que $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$, déterminer les valeurs possibles de $\cos(x)$.
5. Sachant que $\cos(x) = \dfrac{2}{5}$ et que $x \in [0\,;\pi]$, déterminer les valeurs possibles de $\sin(x)$.

Exercice 2.26. Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

$$2\cos(x) = \sqrt{2}, \quad -2\sin(x) = 1, \quad (2\sin(x) - 1)\cos(x) = 0, \quad \sin(x)(\cos(x) + 1) = 0,$$
$$(\sqrt{2}\cos(x) - 1)\cos(x) = 0, \quad \sin^2(x) + \sin(x) = 0.$$

Exercice 2.27. Résoudre les inéquations trigonométriques suivantes :

$$2\cos(x) \geq \sqrt{2}, \quad -2\sin(x) < 1, \quad 2\sin(x) - 1 \leq 0, \quad \cos(x) + 1 \geq 0,$$
$$(\sqrt{2}\cos(x) - 1)\cos(x) < 0, \quad \sin^2(x) + \sin(x) \geq 0.$$

2.9 Savoirs-faire et attendus

- Connaître, placer et repérer sur le cercle trigonométrique les angles en radians de références.
- Convertir un angle en radian en degré et réciproquement.
- Calculer la mesure d'un angle orienté.
- Utiliser les formules sur les angles orientés.
- Déterminer si deux vecteurs sont orthogonaux ou colinéaires à partir de la mesure de leur angle orienté.
- Connaître les cosinus et sinus des angles de références.
- Déterminer un cosinus/sinus connaissant le sinus/cosinus.
- Résoudre une équation trigonométrique.