

Chapitre 4

Nombre dérivé

4.1 Nombre dérivé

Définition 4.1. Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel de I . Soit h un nombre réel non nul tel que $x_0 + h \in I$. On appelle **taux d'accroissement** de f entre x_0 et $x_0 + h$ le nombre :

$$\tau_h(x_0) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Définition 4.2. Soient f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I . On dit que f est **dérivable** en x_0 si le taux d'accroissement de f entre x_0 et $x_0 + h$ admet une unique limite finie lorsque h tend vers 0. On appelle cette limite **nombre dérivé** de f en x_0 et on la note $f'(x_0)$. On peut écrire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0) \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

Exemples :

1. Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

— On vérifie si f est dérivable en 1. Soit $h \neq 0$, on pose :

$$\begin{aligned} \tau_h(1) &= \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \\ &= \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} \\ &= \frac{h^2 + 2h}{h} \\ &= h + 2. \end{aligned}$$

Cette expression tend vers 2 lorsque h tend vers 0. On peut donc écrire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = 2.$$

On en déduit que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 2$.

— On vérifie si f est dérivable en -2 . On pose :

$$\begin{aligned}\tau_h(-2) &= \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} \\ &= \frac{(-2+h)^2 - (-2)^2}{h} \\ &= \frac{h^2 - 4h}{h} \\ &= h - 4.\end{aligned}$$

Cette expression tend vers -4 lorsque h tend vers 0 . On peut donc écrire :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = -4.$$

On en déduit que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = -4$.

2. On définit la fonction g par $g(x) = \sqrt{x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On vérifie si g est dérivable en 0 . Soit $h > 0$, on pose :

$$\begin{aligned}\tau_h(0) &= \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \\ &= \frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h}}{h} \\ &= \frac{1}{\sqrt{h}}.\end{aligned}$$

Cette expression tend vers $+\infty$ lorsque h tend vers 0 . On en déduit que g n'est pas dérivable en 0 .

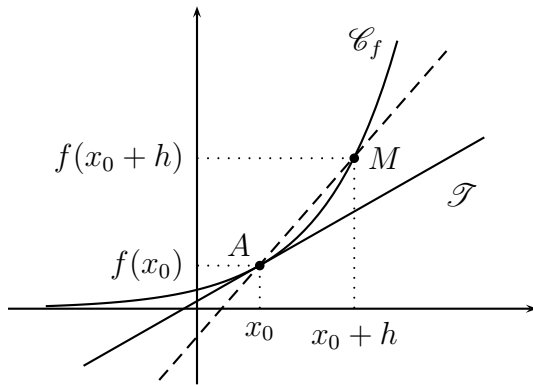
3. On définit la fonction v par $v(x) = |x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On vérifie si v est dérivable en 0 . Soit $h \neq 0$, on pose :

$$\begin{aligned}\tau_h(0) &= \frac{v(0+h) - v(0)}{h} \\ &= \frac{|0+h| - |0|}{h} \\ &= \frac{|h|}{h}.\end{aligned}$$

On a $|h| = h$ si $h > 0$ et donc $\tau_h = 1$; par contre, si $h < 0$, on a $|h| = -h$ et donc $\tau_h = -1$. Cette expression n'a pas une unique limite (elle en deux : 1 et -1) lorsque h tend vers 0 . On en déduit que v n'est pas dérivable en 0 .

4.2 Tangente

Définition 4.3. Soit f une fonction définie sur un intervalle I . Soit $x_0 \in I$ tel que f soit dérivable en x_0 . On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan. La tangente à \mathcal{C}_f au point $A(x_0; f(x_0))$ est la droite passant par A et de coefficient directeur $f'(x_0)$.

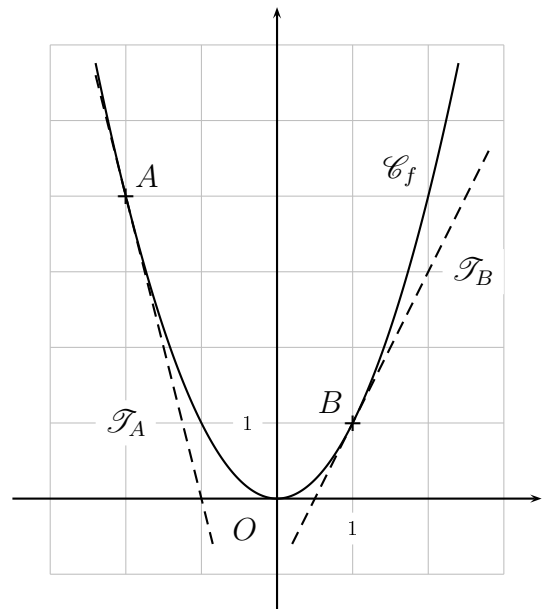


Lorsque h tend vers 0, alors le point M se rapproche de A , et la droite (AM) s'approche de \mathcal{T} .

★ Vidéo.

Exemple :

On considère à nouveau la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$. Précédemment nous avons établi que f est dérivable en 1 et que $f'(1) = 2$. De même nous avons montré que f est dérivable en -2 et que $f'(-2) = -4$. La courbe \mathcal{C}_f passe par les points $A(-2; 4)$ et $B(1; 1)$. On note \mathcal{T}_A et \mathcal{T}_B les tangentes à \mathcal{C}_f passant respectivement par A et B . Le coefficient directeur de \mathcal{T}_A est donc $f'(-2) = -4$ et le coefficient directeur de \mathcal{T}_B est $f'(1) = 2$.



Propriété 4.1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I et dérivable en $x_0 \in I$. On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de f . Alors \mathcal{C}_f admet au point d'abscisse x_0 une tangente d'équation :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Démonstration. Soit $M(x; y)$ un point du plan. On sait que \mathcal{T} a pour coefficient directeur $f'(x_0)$. Cela signifie que le vecteur $u \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de \mathcal{T} . On a alors :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{T} &\iff (AM) \text{ et } \mathcal{T} \text{ sont parallèles,} \\ &\iff u \begin{pmatrix} 1 \\ f'(x_0) \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - f(x_0) \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires,} \\ &\iff 1 \times (y - f(x_0)) - f'(x_0)(x - x_0) = 0, \\ &\iff y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0). \end{aligned}$$

□

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

Exemple :

- Dans l'exemple précédent, on a $f(1) = 1$ et $f'(1) = 2$. Cela signifie que \mathcal{T}_A a pour équation $y = 2(x - 1) + 1$ que l'on peut réduire en $y = 2x - 1$.
- On a également $f(-2) = 4$ et $f'(-2) = -4$. La tangente \mathcal{T}_B a donc pour équation $y = -4(x - (-2)) + 4$, que l'on peut réécrire $y = -4x - 4$.

4.3 Attendus et savoir-faire

- Calculer un taux d'accroissement, un nombre dérivé.
- Déterminer si une fonction est dérivable en un point ou pas.
- Lire un nombre dérivé sur une tangente.
- Déterminer l'équation d'une tangente et la tracer.

4.4 Exercices

4.4.1 Démarrage

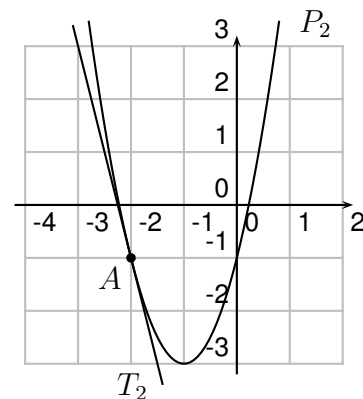
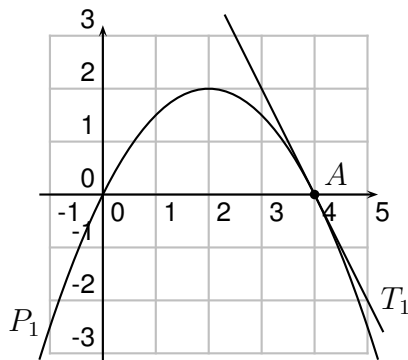
Exercice 4.1. Pour $h \neq 0$, calculer le taux d'accroissement en 1 des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = -1, \quad g(x) = 3x - 1, \quad h(x) = x^2.$$

Exercice 4.2. Déterminer le nombre dérivé en 1 des fonctions de l'exercice ci-dessus.

Exercice 4.3. Déterminer l'équation de la tangente en 1 des fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 4.4. Déterminer les nombres dérivés des polynômes P_1 et P_2 au point A puis les équations des tangentes T_1 et T_2 .



Exercice 4.5. À partir des équations de tangentes à f en $x = 2$ ci-dessous, déterminer $f(2)$ et $f'(2)$.

$$y = -3(x - 2) + 4, \quad y = 5(x - 2) + \frac{1}{4}, \quad y = -\frac{1}{2}(x - 2).$$

4.4.2 Approfondissement

Exercice 4.6. Pour $h \neq 0$, calculer le taux d'accroissement en 1 des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = x^3, \quad g(x) = x^4, \quad h(x) = \frac{1}{x}.$$

Indication : pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ et $(a + b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Exercice 4.7. Déterminer le nombre dérivée en 1 des fonctions de l'exercice ci-dessus.

Exercice 4.8. Soit f la fonction carrée et \mathcal{C}_f sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de \mathcal{C}_f qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -2x + 5$?

Exercice 4.9. Soit f la fonction cube et \mathcal{C}_f sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de \mathcal{C}_f qui soit parallèle à la droite d'équation $y = -8x + 5$?

Exercice 4.10. Soit f définie et dérivable sur \mathbb{R} ; on note \mathcal{C}_f sa courbe représentative. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses, justifier.

1. Si $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$, alors la tangente à \mathcal{C}_f au point $A(1; 2)$ est parallèle à l'axe des abscisses.
2. Si la droite d'équation $y = 2x + 3$ est tangente à \mathcal{C}_f au point $A(0; 3)$, alors $f'(0) = 3$.
3. Si $f(1) = 2$ et $f'(2) = 1$, alors la tangente à \mathcal{C}_f au point $A(2; 1)$ est d'équation $y = x - 1$.

4.4.3 Entraînement

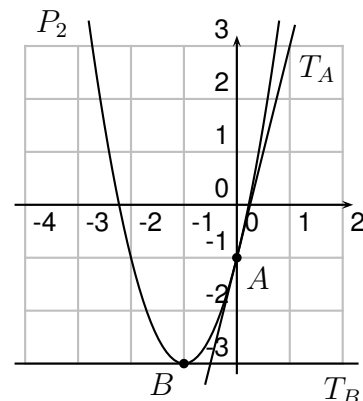
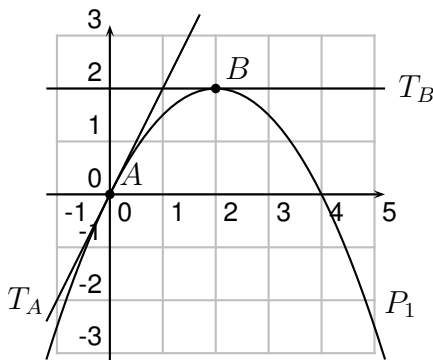
Exercice 4.11. Pour $h \neq 0$, calculer le taux d'accroissement en -1 des fonctions définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_1(x) = -1, \quad f_2(x) = 5x, \quad f_3(x) = -2x^2 + 1, \quad f_4(x) = x^2 + 3x - 2, \quad f_5(x) = \frac{-3}{x}, \quad f_6(x) = 2 + \frac{5}{x}.$$

Exercice 4.12. Déterminer le nombre dérivée en -1 des fonctions de l'exercice ci-dessus.

Exercice 4.13. Déterminer l'équation de la tangente en -1 des fonctions de l'exercice précédent.

Exercice 4.14. Déterminer les nombres dérivés des polynômes P_1 et P_2 aux points A et B puis les équations des tangentes T_A et T_B .



Exercice 4.15. Soit f la fonction carrée et \mathcal{C}_f sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de \mathcal{C}_f qui soit parallèle à la droite d'équation $y = 4x - 1$?

Exercice 4.16. Soit f la fonction racine carrée et \mathcal{C}_f sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de \mathcal{C}_f qui soit parallèle à la droite d'équation $y = 4x + 5$?

4.5 Étude

La figure ci-dessous représente la trajectoire du Coco News, la mouette factrice dans l'univers de One Piece lorsqu'elle vient livrer le journal à Brook, Chopper, Robin et Sanji sur leur bateau. Le journal – une fois lâchée par le Coco News – tombe alors selon la tangente de la trajectoire de ce dernier.

Le Coco News est représentée par le point M et sa trajectoire a pour équation

$$y = f(x) = 1 + \frac{1}{x}.$$

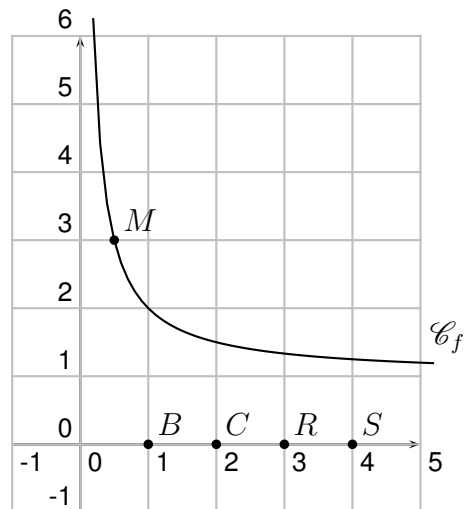
Brook, Chopper, Robin et Sanji sont respectivement représentés par les points B , C , R et S .

On souhaite trouver en quels points de sa trajectoire le Coco News doit lâcher les journaux pour que ceux-ci atteignent les quatre cibles.

Cas général

On note x_0 l'abscisse du point de largage du journal.

1. Quelle est l'ordonnée du point de largage du journal ?
2. Montrer que le nombre dérivé de f en $x_0 \in \mathbb{R}^*$ est $-\frac{1}{x_0^2}$.
3. Donner l'équation de la tangente \mathcal{T} à la trajectoire du Coco News au point de coordonnées $(x_0; f(x_0))$.



Cas particulier : Brook

1. Par quel point passe \mathcal{T} ?
2. En déduire que x_0 vérifie $x_0^2 + 2x_0 - 1 = 0$.
3. Trouver x_0 et les coordonnées du point de largage pour Brook.

Retour au cas général

On note a l'abscisse d'un personnage quelconque sur le bateau.

1. Montrer que x_0 vérifie

$$x_0^2 + 2x_0 - a = 0.$$

2. En déduire une expression de x_0 et des coordonnées du point de largage en fonction de a .
3. Écrire et coder en Python un algorithme donnant les coordonnées du point de largage du journal connaissant l'abscisse de sa cible. Le tester avec Brook puis Chopper, Robin et Sanji.