Chapitre 6

Fonction dérivée et application

6.1 Fonction dérivée

6.1.1 Définition

Définition 6.1. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et J un intervalle inclus dans I. Si f est dérivable en x_0 pour tout $x_0 \in J$, on dit que f est* ***dérivable*** *sur J. La fonction qui à tout $x_0 \in J$ associe $f'(x_0)$ s'appelle* ***fonction dérivée*** *de f, elle est notée f'.*

Exemple On considère encore la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$. Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, alors :

$$\begin{aligned}
\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\
&= \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} \\
&= \frac{2x_0h + h^2}{h} \\
&= 2x_0 + h \quad \text{car} \quad h \neq 0.
\end{aligned}$$

Quelque soit la valeur de x_0, cette expression tend vers $2x_0$ lorsque h tend vers 0. La fonction f' est donc définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x_0) = 2x_0$.

6.1.2 Dérivées usuelles

Propriété 6.1.

$f : x \mapsto$	$\mathcal{D}_f$	$f' : x \mapsto$	$\mathcal{D}_{f'}$
k $(k \in \mathbb{R})$	$\mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
ax $(a \neq 0)$	$\mathbb{R}$	a	$\mathbb{R}$
x^2	$\mathbb{R}$	$2x$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\dfrac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$

Le tableau ci-contre contient les dérivées des fonctions usuelles ainsi que leurs domaines de définition, lesquels ne sont pas toujours identiques à ceux des fonctions de départ : on fera attention au cas de $x \mapsto \sqrt{x}$.

★ *Vidéo.*

6.1.3 Opérations

Propriété 6.2. *Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalles I et k un nombre réel.*

1. *La fonction $u+v$ est dérivable sur I, et on a : $(u+v)' = u' + v'$.*
2. *La fonction $k \times u$ est dérivable sur I, et on a : $(k \times u)' = k \times u'$.*
3. *La fonction $u \times v$ est dérivable sur I, et on a : $(uv)' = u'v + uv'$.*
4. *La fonction u^2 est dérivable sur I, et on a : $(u^2)' = 2uu'$.*
5. *Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{1}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{1}{v}\right)' = -\dfrac{v'}{v^2}$.*
6. *Si v ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I et on a : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.*

★ Vidéo 1 ; vidéo 2 ; vidéo 3 ; vidéo 4 ; vidéo 5.

Exemples :

— Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^3 - 4x + 5$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times 3x^2 - 4 \times 1 + 0 \\ &= 6x^2 - 4. \end{aligned}$$

— On définit g sur $I =]0\,;+\infty[$ par $g(x) = (\sqrt{x} - 1)(3x^2 + x)$. On peut écrire :

$$g(x) = u(x)v(x) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = \sqrt{x} - 1, \\ v(x) = 3x^2 + x. \end{cases}$$

Ainsi g est le produit des fonctions u et v, toutes deux dérivables sur I. On en déduit que g est dérivable sur I, et pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}}(3x^2 + x) + (\sqrt{x} - 1)(6x + 1). \end{aligned}$$

— Soit h définie sur $J =]2\,;+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x - 2}$. On peut écrire :

$$g(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(x) = x^2 + x + 1, \\ v(x) = x - 2. \end{cases}$$

Ainsi g est le quotient des fonctions u et v. Toutes deux sont dérivables sur J, de plus v ne s'annule pas sur J. On en déduit que h est dérivable sur J, et pour tout $x \in J$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \\ &= \frac{(2x+1)(x-2) - (x^2 + x + 1) \times 1}{(x-2)^2} \\ &= \frac{x^2 - 4x - 3}{(x-2)^2}. \end{aligned}$$

6.2 Variations

Propriété 6.3. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*

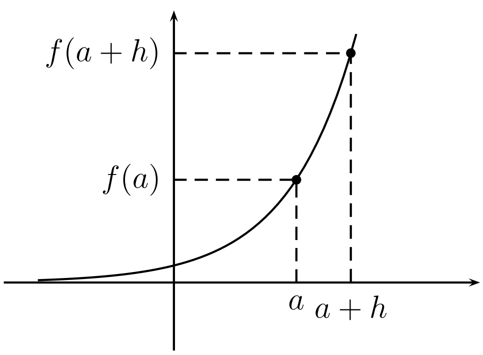
1. *Si f est constante sur I, alors f' est nulle sur I.*
2. *Si f est croissante sur I, alors f' est positive sur I.*
3. *Si f est décroissante sur I, alors f' est négative sur I.*

Démonstration. Considérons f définie et sur un intervalle I et a un réel de I. Soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$. Alors le taux d'accroissement de f en a vaut :

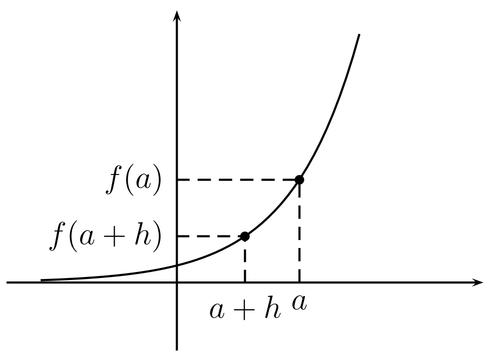
$$\tau_h(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

1. On suppose que f est constante sur I. Alors on a $f(a+h) = f(a)$ et donc $\tau_h(a) = 0 \to 0$ lorsque $h \to 0$. Donc $f'(a) = 0$.
2. On suppose que f est croissante sur I.

Si $h > 0$:



Si $h < 0$:



Par hypothèse, la quantité $\tau_h(a)$ est positive quel que soit le signe de h. Sa limite lorsque h tend vers 0 est donc aussi positive et vaut par définition $f'(a)$. On en déduit que $f'(a) \geq 0$.

3. On raisonne de la même façon lorsque f est décroissante.

□

Propriété 6.4. *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*

1. *Si f' est nulle sur I, alors f est constante sur I.*
2. *Si f' est positive sur I, alors f est croissante sur I.*
3. *Si f' est négative sur I, alors f est décroissante sur I.*

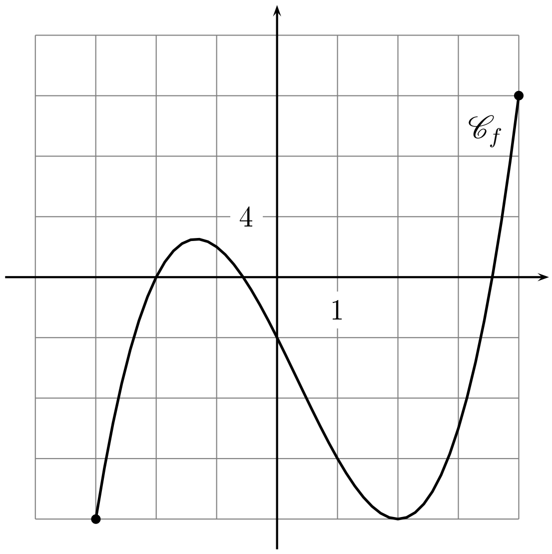
Exemples :

— On considère f définie sur $I = [-3\,;4]$ par $f(x) = x^3 - x^2 - 8x - 4$. Pour tout $x \in I$, on a :

$$f(x) = x^3 - x^2 - 8x - 4$$
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8.$$

Après calculs, f' a deux racines $x_1 = -\dfrac{4}{3}$ et $x_2 = 2$. On en déduit le signe de f' et les variations de f :

x	-3		$-\frac{4}{3}$		2		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-16	$\nearrow$	$\frac{68}{27}$	$\searrow$	-16	$\nearrow$	12



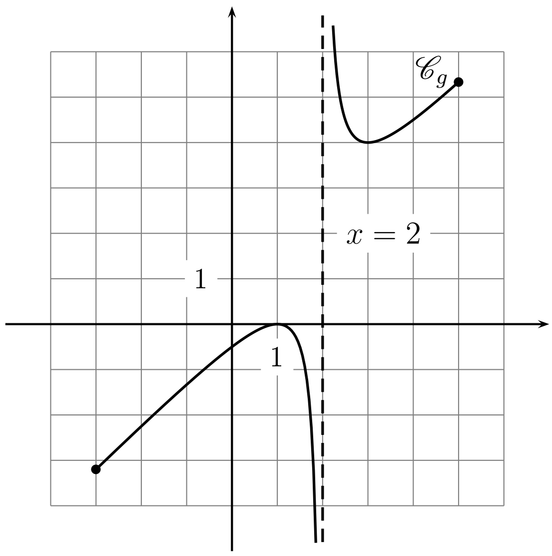
— Soit g définie sur $J = [-3\,;2[\,\cup\,]2\,;5]$ par $g(x) = x + \dfrac{1}{x-2}$.

Pour tout $x \in J$, on a :

$$\begin{aligned}
g(x) &= x + \frac{1}{x-2}\\
g'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-2)^2}\\
&= \frac{(x-2)^2 - 1}{(x-2)^2}\\
&= \frac{(x-3)(x-1)}{(x-2)^2}.
\end{aligned}$$

On en déduit le signe de g' et les variations de g :

x	-3		1		2		3		4
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{16}{5}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \; \Vert \; +\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{16}{3}$



La courbe $\mathscr{C}_g$ est la réunion de deux *arcs d'hyperbole*. La droite d'équation $x = 2$ est une *asymptote verticale* à $\mathscr{C}_g$.

★ Vidéo.

6.3 Extrema

Définition 6.2. *Soient f une fonction définie sur un intervalle I et $x_0 \in I$.*

- *On dit que $f(x_0)$ est le* ***maximum*** *de f sur I si $f(x) \leq f(x_0)$ pour tout $x \in I$.*
- *On dit que $f(x_0)$ est le* ***minimum*** *de f sur I si $f(x) \geq f(x_0)$ pour tout $x \in I$.*

Définition 6.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle I et x_0 un réel de I.*

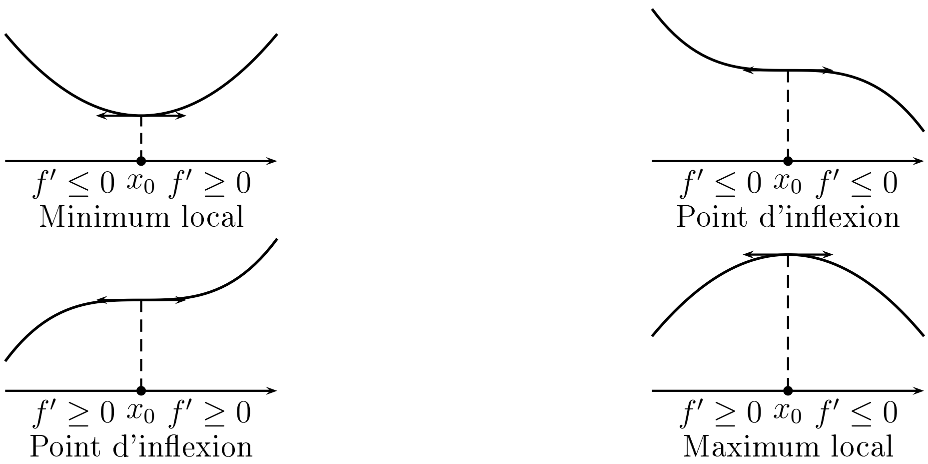
- *On dit que f admet un* ***maximum local*** *en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 et tel que $f(x_0)$ soit le maximum de f sur J.*
- *On dit que f admet un* ***minimum local*** *en x_0 s'il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant x_0 et tel que $f(x_0)$ soit le minimum de f sur J.*
- *On dit que f admet un* ***extremum local*** *en x_0 si elle admet un maximum local ou un minimum local en x_0.*

Exemple On considère la fonction f définie précédemment :

x	-3		$\frac{4}{3}$		2		4
$f(x)$	-16	↗	$\frac{68}{27}$	↘	-16	↗	12

1. Le maximum de f est 12, il est atteint en 4.
2. Le maximum de f sur $[-3\,;2]$ est $\dfrac{68}{27}$, il est atteint en $-\dfrac{4}{3}$. On en déduit que f admet un maximum local en $-\dfrac{4}{3}$. Ce n'est en revanche pas un *maximum global.*
3. La fonction f admet un minimum local en 2, c'est aussi un minimum global.

Propriété 6.5. *Soient f une fonction définie et dérivable sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$. Alors f admet un extremum local en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$ et f' change de signe autour de x_0.*



★ Vidéo.

6.4 Attendus et savoir-faire

- Connaître et calculer les dérivées usuelles.
- Utiliser les dérivées usuelles pour en calculer d'autres, notamment avec des opérations.
- Déterminer les variations d'une fonction à partir du signe de sa dérivée et réciproquement.
- Faire le lien entre dérivée et extremum local ; trouver les extremums locaux d'une fonction.
- Résoudre graphiquement des équations du type $f'(x) = 0$ et comparer des images de dérivées.

6.5 Exercices

6.5.1 Démarrage

Exercice 6.1. Calculer les dérivées de

$$f_1(x) = 3, \quad f_2(x) = x - 1, \quad f_3(x) = -5x, \quad f_4(x) = x^2 + 1, \quad f_5(x) = 2x^2 - 3x.$$

Exercice 6.2. Calculer les dérivées de

$$f_1(x) = x\sqrt{x}, \quad f_2(x) = (2x+1)\sqrt{x}, \quad f_3(x) = x^2(\sqrt{x}+1), \quad f_4(x) = (x^3+1)(2\sqrt{x}-1).$$

Exercice 6.3. Calculer les dérivées de

$$f_1(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f_2(x) = \frac{x+1}{x-1}, \quad f_3(x) = \frac{2x-3}{4-2x}, \quad f_4(x) = -\frac{x^2}{x+1}.$$

Exercice 6.4. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la dérivée a pour tableau de signe ci-dessous. Donner les variations de f.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Exercice 6.5. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ ayant le tableau de variations ci-dessous. Donner le tableau de signe de f'.

x	$-\infty$		-4		-2		0		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 6.6. Donner les ensembles de définition et de dérivation puis étudier les variations et les extremums locaux des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = -3x + 4$;
2. $f_2(x) = -x^2 + 7x - 8$;
3. $f_3(x) = 7x^3 + x^2 - 4x + 3$;
4. $f_4(x) = x - \dfrac{1}{x}$.

6.5.2 Approfondissement

Exercice 6.7. Calculer les dérivées de

$$f_1(x) = \frac{11}{x}, \quad f_2(x) = -\frac{4}{x}+x^2, \quad f_3(x) = -\frac{1}{2x}+x, \quad f_4(x) = -\frac{1}{3x}+\sqrt{x}, \quad f_5(x) = 2x^5+4\sqrt{x}-\frac{1}{2x}.$$

Exercice 6.8. [Démonstration] Soient f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = k$ avec k constante et $g(x) = mx + p$ avec $m \in \mathbb{R}^*$ et $p \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que f est dérivable de dérivée constante nulle.
2. Montrer que g est dérivable de dérivée constante égale à m.

Indication : on calculera d'abord les taux d'accroissement puis on passera à la limite.

Exercice 6.9. [Démonstration] Soient u et v définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, k une constante.

1. Montrer que ku est dérivable de dérivée $[ku]' = ku'$.
2. Montrer que $u + v$ est dérivable de dérivée $[u + v]' = u' + v'$.

Exercice 6.10. Calculer les dérivées de

$$f_1(x) = (x-1)(3\sqrt{x}+1), \quad f_2(x) = (2x^2+x+1)\sqrt{x}, \quad f_3(x) = (x^3+x-1)(\sqrt{x}-2), \quad f_4(x) = x^4(2\sqrt{x}-x).$$

Exercice 6.11. Calculer les dérivées de

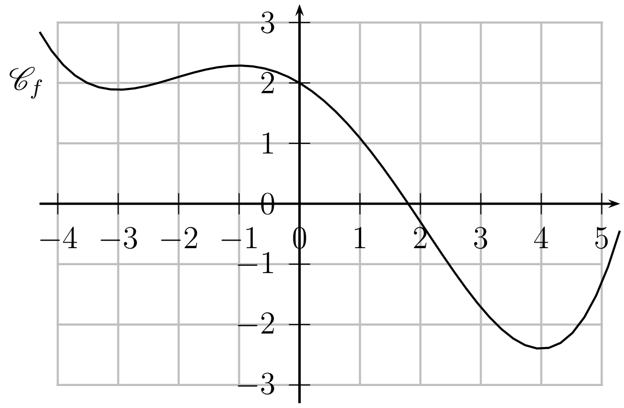
$$f_1(x) = \frac{x+1}{x^2}, \quad f_2(x) = \frac{2x-3}{x^2-1}, \quad f_3(x) = \frac{2x^2-3}{4-2x^2}, \quad f_4(x) = -\frac{\sqrt{x}}{x+1}, \quad f_5(x) = \frac{(2x^2+x)\sqrt{x}}{2-x^3}.$$

Exercice 6.12. [Démonstration] (***) Soient u et v définies et dérivables sur $\mathbb{R}$, k une constante.

1. Montrer que uv est dérivable de dérivée $[uv]' = u'v + uv'$.
2. Si de plus v est non nulle, montrer que $\frac{u}{v}$ est dérivable de dérivée $\left[\frac{u}{v}\right]' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$.

Exercice 6.13. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on a la représentation ci-dessous.

1. Résoudre $f'(x) = 0$.
2. Quel est le signe de $f'(0)$? – de $f'(-2)$?
3. Donner le tableau de variation de f puis de signe de f'.
4. Comparer $f'(2)$ et $f'(5)$.
5. Comparer $f'(-2)$ et $f'(5)$.



Exercice 6.14. Donner les ensembles de définition et de dérivation puis étudier les variations et les extremums locaux des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = \frac{x+2}{x-1}$;
2. $f_2(x) = \frac{-4x}{x^2+1}$;
3. $f_3(x) = x - 1 + \frac{4}{x-2}$;
4. $f_4(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x}}$.

Exercice 6.15. Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{x^2-3}{x^2+1}$.

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer un encadrement de $g(x)$ pour chacun des intervalles suivants

   (a) $[0\,;1]$, (b) $[-1\,;3]$, (c) $[-1\,;1]$, (d) $\left[-\sqrt{3}\,;0\right]$.
3. Calculer $g(\sqrt{3})$ puis résoudre $g(x) \leq 0$ à l'aide du tableau de variations.

Exercice 6.16. [Pollution] Deux usines A et B distantes de 6000m rejettent des particules polluantes. On sait que A émet deux fois plus de particules que B. Par ailleurs, on suppose que la pollution en un point est inversement proportionnelle à la distance à la source de pollution. On souhaite trouvé en quel point du segment $[AB]$ la pollution est minimale.

1. On note Q la quantité de particule émise à l'usine B. Soit $M \in [AB]$ tel que $AM = x$. Montrer que la quantité de particule en M est

$$Q\left(\frac{2}{x} + \frac{1}{6000-x}\right).$$

2. Étudier les variations de la fonctions $f(x) = \left(\frac{2}{x} + \frac{1}{6000 - x}\right)$.
3. En quel point de $[AB]$ la pollution est-elle la plus faible ?

Exercice 6.17. [Optimisation] Un maraîcher veut cultiver un champ rectangulaire de 300m^2 en permaculture. Afin d'empêcher des chèvres de manger sa future production, il souhaite installer une clôture autour de cet espace. On note x la largeur du champ et y sa longueur.

1. Sachant que l'aire du champ est de 300m^2, exprimer y en fonction de x.
2. On note $l(x)$ la longueur de la clôture en fonction de x. Montrer que
$$l(x) = 2\frac{x^2 + 300}{x}.$$
3. En déduire les valeurs de x et y pour minimiser la longueur de la clôture, préciser cette longueur.

Exercice 6.18. [Économie] La Multinationale fabrique son nouveau iTruc avec un coût total – pour x iTruc fabriqués – donné par
$$C(x) = \frac{x^2}{10} - 20x + 1960.$$
Le **coût moyen unitaire** est défini par $C_m(x) = \frac{C(x)}{x}$.

1. Étudier les variations de C_m et déterminer pour quelle valeur x_0 de x C_m atteint son minimum.
2. Calculer $C'(x)$ et vérifier que $C'(x_0) = C_m(x_0)$.
3. Vérifier que la tangente à la courbe « coût total » au point d'abscisse x_0 passe par l'origine.

Exercice 6.19. [Économie] La Multinationale fabrique encore un nouveau iTruc en édition Premium limité à 300 exemplaires. Pour x iTruc Premium fabriqués, le coût total est donné par
$$C(x) = \frac{x^3}{30} - 15x^2 + 2500x.$$
On appelle **coût marginal** la dépense occasionnée par la fabrication d'un produit supplémentaire. Ce coût marginal C_m est modélisé par $C_m(x) = C'(x)$ (approximation du taux d'accroissement par la dérivée pour un grand nombre de produit). La Multinationale est maintenant en situation de monopole et le prix est considéré comme étant uniquement fonction de la demande. Quand x iTruc sont vendus (demande), chacun l'est au prix unitaire de
$$p(x) = -\frac{45}{8}x + 2750.$$

1. Calculer la recette totale $R(x)$ faite pour x iTruc vendus.
2. On appelle recette marginale la recette l'augmentation de recette procurée par la vente d'un produit supplémentaire. Celle-ci est modélisée par $R_m(x) = R'(x)$. Pour quelle valeur de x la recette marginale est égale au coût marginal ?

Exercice 6.20. En étudiant les fonctions associées aux suites suivantes, déterminer leurs variations.

1. $u_n = 10n^3 - 5n^2 + 6n - 7$.
2. $v_n = 50\sqrt{n} - n$.
3. $w_n = \dfrac{1}{n^4+1}$.

Exercice 6.21. (***) Chercher une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout $x \in]-\infty\,;-1] \cup [-1\,;+\infty[$, $f'(x) < 0$ et pour tout $x \in [-1\,;1[$, $f'(x) > 0$. On sait de plus que $f'(-1) = f'(1) = 0$. *Indication :* on pourra commencer par dresser le tableau de signe de f'.

6.5.3 Entraînement

Exercice 6.22. Calculer les dérivées de

$$f_1(x) = -1, \quad f_2(x) = x+4, \quad f_3(x) = 7x+1, \quad f_4(x) = -x^2+2, \quad f_5(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3,$$

$$f_6(x) = \frac{2}{x}, \quad f_7(x) = -\frac{3}{x}+x, \quad f_8(x) = \frac{1}{2x}+x^3, \quad f_9(x) = -\frac{1}{3x}+\sqrt{x}, \quad f_{10}(x) = -2x^4+3\sqrt{x}-\frac{1}{4x}.$$

Exercice 6.23. Calculer les dérivées de

$$f_1(x) = -x\sqrt{x}, \quad f_2(x) = (3-2x)\sqrt{x}, \quad f_3(x) = 2x^2(\sqrt{x}-4), \quad f_4(x) = 2x^3(6\sqrt{x}-1),$$

$$f_5(x) = (x+1)(\sqrt{x}+2), \quad f_6(x) = (x^2+x)(3\sqrt{x}+1), \quad f_7(x) = (2x^3+x)(7\sqrt{x}-4),$$

$$f_8(x) = (5x^3+1)(\sqrt{x}-1), \quad f_9(x) = (x\sqrt{x}+x^2)x^2\sqrt{x}.$$

Exercice 6.24. Calculer les dérivées de

$$f_1(x) = \frac{1}{x^3}, \quad f_2(x) = \frac{3x+1}{x}, \quad f_3(x) = \frac{2-3x}{4x-2}, \quad f_4(x) = -\frac{3x^2}{x+9}, \quad f_5(x) = \frac{6x^2-x}{4+x},$$

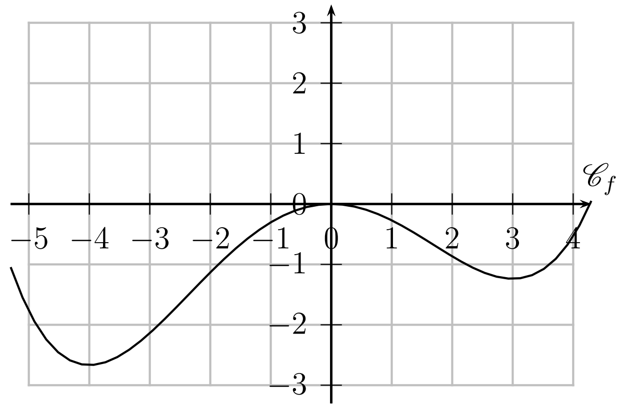
$$f_6(x) = \frac{x^2+x}{x^3}, \quad f_7(x) = \frac{\sqrt{x}}{x}, \quad f_8(x) = \frac{2x-3x^2}{4x^2-2}, \quad f_9(x) = -\frac{3\sqrt{x}}{\sqrt{x}+9}, \quad f_{10}(x) = \frac{\sqrt{x}+1}{(4+x^2)\sqrt{x}}.$$

Exercice 6.25. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ ayant le tableau de variations ci-dessous. Donner le tableau de signe de f' et les solutions de l'équation $f'(x) = 0$.

x	$-\infty$		-10		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	4	$\nearrow$	7	$\searrow$	$-\infty$

Exercice 6.26. Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on a la représentation ci-dessous.

1. Résoudre $f'(x) = 0$.
2. Quel est le signe de $f'(-5)$? – de $f'(-2)$?
3. Donner le tableau de variation de f puis de signe de f'.
4. Comparer $f'(-1)$ et $f'(1)$.
5. Comparer $f'(-1)$ et $f'(4)$.



Exercice 6.27. Donner les ensembles de définition et de dérivation puis étudier les variations et les extremums locaux des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = x^2 + 4x - 3$;
2. $f_2(x) = \dfrac{1}{4}x(x^2 - 12)$;
3. $f_3(x) = 2x - 3 + \dfrac{2}{x-1}$;
4. $f_4(x) = \dfrac{3-x}{x-2}$.

Exercice 6.28. En étudiant les fonctions associées aux suites suivantes, déterminer leurs variations.

1. $u_n = -4n^3 + n^2 + 4n + 9$.
2. $v_n = \dfrac{1}{n^3+1}$.
3. $w_n = \dfrac{n}{2} - \sqrt{n}$.

6.6 Étude

On souhaite déterminer les dimensions optimales d'un cylindre de volume 1 afin de minimiser sa surface et ainsi la quantité de matériaux nécessaires à sa fabrication. Il s'agit d'un problème classique dit d'optimisation sous contrainte, la contrainte étant ici sur le volume du cylindre qui reste fixe et l'optimisation portant sur la surface de celui-ci. Ce problème s'est concrètement posé pour les boîtes de conserves par exemple, permettant ainsi de diminuer leurs coûts de fabrication. Il existe une branche des mathématiques nommée optimisation de forme qui s'intéresse aux problèmes de ce genre, elle mélange géométrie et analyse.

On note h la hauteur du cylindre et r le rayon de sa base.

1. Exprimer h en fonction de r.
2. On note $S(r)$ la surface du cylindre en fonction de son rayon. Donner l'expression de S et son domaine de définition.
3. Déterminer le minimum de S et les dimensions optimales du cylindre.