Chapitre 10

Exponentielle

10.1 Définition

Théorème 10.1. *Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.*

Démonstration. Admis. □

Définition 10.1. *On appelle* ***fonction exponentielle*** *l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. On la note* exp.

Remarque : On a donc $\exp(0) = 1$.

10.2 Propriétés

10.2.1 Propriétés fonctionnelles

Propriété 10.1. *La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est sa propre dérivée : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\exp'(x) = \exp(x)$.*

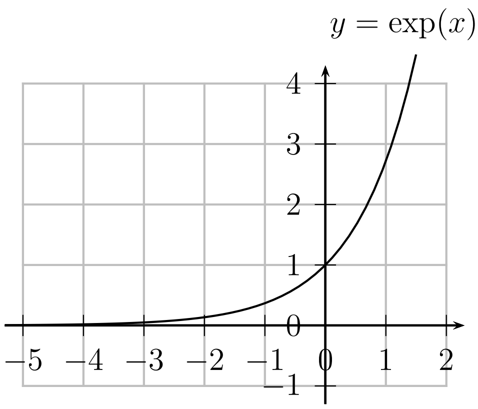
Démonstration. Conséquence de sa définition. □

Propriété 10.2. *La fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(x) > 0$.*

Démonstration. Admis. □

Propriété 10.3. *La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.*

Démonstration. L'exponentielle étant sa propre dérivée et strictement positive, on en déduit que sa dérivée est strictement positive et donc qu'elle est strictement croissante. □



10.2.2 Relations fonctionnelles

Propriété 10.4. *Pour tous réels x et y, on a* $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$*.*

Remarque : L'exponentielle transforme la somme en produit.

Démonstration. Soit $y \in \mathbb{R}$. Comme l'exponentielle ne s'annule pas, la fonction $f(x) = \dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)}$ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Elle est par ailleurs dérivable et

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\exp'(x+y)\exp(x) - \exp'(x)\exp(x+y)}{[\exp(x)]^2} \\ &= \frac{\exp(x+y)\exp(x) - \exp(x)\exp(x+y)}{[\exp(x)]^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction f est donc constante ; pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(0) = \exp(y)$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\exp(y) = \frac{\exp(x+y)}{\exp(x)},$$

donc $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$. ☐

Corollaire 10.1. *Pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

1. $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$. *2.* $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$. *3.* $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

Démonstration. Soient x, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.

1. En prenant $y = -x$ dans le théorème précédent, on obtient

$$\exp(x-x) = \exp(x) \times \exp(-x) \Longleftrightarrow 1 = \exp(x) \times \exp(-x) \Longleftrightarrow \exp(-x) = \frac{1}{\exp(-x)}.$$

2. D'après le théorème précédent le point *1*, on a

$$\exp(x-y) = \exp(x) \times \exp(-y) = \exp(x) \times \frac{1}{\exp(y)} = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}.$$

3. Admise.

☐

10.2.3 Le nombre e

Définition 10.2. *Le nombre* $\exp(1)$ *est noté* e *:* $\exp(1) = \mathrm{e}$*.*

Propriété 10.5. *On a pour tout $x \in \mathbb{R}$,* $\exp(x) = \mathrm{e}^x$*.*

Démonstration. Admise. ☐

Remarque : En effet, on a $\exp(x) = \exp(1 \times x) = [\exp(1)]^x$ comme expression généralisant le point *3* du corollaire 10.1.

Propriété 10.6. *Pour tous x, $y \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$.*

1. $\mathrm{e}^0 = 1$ *et* $\mathrm{e}^1 = e$.

2. $\mathrm{e}^x > 0$ *et* $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$.

3. $\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \times \mathrm{e}^y, \quad \mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}, \quad \mathrm{e}^{x-y} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^y}, \quad \mathrm{e}^{nx} = [\mathrm{e}^x]^n.$

Remarque : On retrouve les propriétés des fonctions puissance.

★ Vidéo.

10.3 Résolution d'équations et d'inéquations

Propriété 10.7. *Soient x, $y \in \mathbb{R}$.*

1. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^y \iff x = y$.

2. $\mathrm{e}^x < \mathrm{e}^y \iff x < y$.

Démonstration. Il s'agit d'une conséquence du fait que la fonction exponentielle soit strictement croissante sur $\mathbb{R}$. □

Exemples :

1. On souhaite résoudre l'équation $\mathrm{e}^{4x+1} = \mathrm{e}^3$. D'après le point *1* de la propriété précédente, cela revient à résoudre l'équation $4x + 1 = 3$. On en déduit que la solution est $x = \dfrac{1}{2}$.
2. On souhaite résoudre l'inéquation $\mathrm{e}^{x^2+1} \leq \mathrm{e}^{-2}$. D'après le point *2* de la propriété précédente, cela revient à résoudre l'inéquation $x^2 + 1 \leq -2$. On en déduit qu'il n'y pas de solutions.

★ Vidéo (équation) ; vidéo (inéquation).

10.4 Fonction composée de la forme e^u avec u fonction

Propriété 10.8. *Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors la fonction e^u est définie et dérivable sur I de dérivée $(\mathrm{e}^u)' = u' \times \mathrm{e}^u$.*

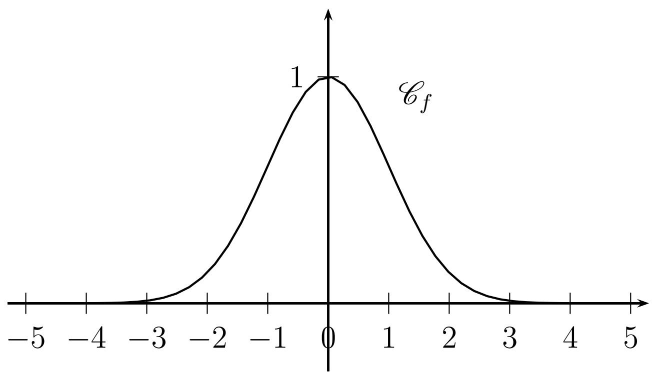
Démonstration. Admise. □

Exemple : On considère la fonction f définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Elle est de la forme e^u avec $u(x) = -\dfrac{x^2}{2}$. u est clairement définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la proposition ci-dessus, e^u aussi et on a

$$f'(x) = \left(-\frac{x^2}{2}\right)' \times \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = -x\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

L'exponentielle étant strictement positive, on en déduit que f' est du signe de$-x$ puis les variations de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$		$+$		$+$	
$-x$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0



Remarque : La fonction f ci-dessus est de la famille des gaussiennes reconnaissables par leurs courbes en forme de cloche. Elles sont très présentes en mathématiques – notamment dans les probabilités avec les lois normales –, apparaissant dans la résolution de nombreux problèmes issus de la physique, la chimie, la biologie, l'écologie, l'économie...

★ Vidéo.

10.5 Attendus et savoir-faire

— Connaître et utiliser les propriétés de l'exponentielle.

— Résoudre des équations et inéquations avec des exponentielles.

— Étudier des fonctions composées avec des exponentielles.

10.6 Exercices

10.6.1 Démarrage

Exercice 10.1. Écrire les nombres suivants sous la forme $\exp(n)$ avec $n \in \mathbb{Z}$.

1. $\exp(3) \times [\exp(4)]^2$.
2. $\exp(-10) \times \exp(6)$.
3. $[\exp(5)]^{-3}$.
4. $\dfrac{1}{[\exp(12)]^{-4}}$.
5. $\dfrac{\exp(2) \times [\exp(-6)]^2}{\exp(3)}$.

Exercice 10.2. Simplifier les expressions suivantes.

1. $\mathrm{e}^6 \times \mathrm{e}^{-3} \times \mathrm{e}^4$.
2. $\mathrm{e}^{-3} \times (\mathrm{e}^2)^8 \times \mathrm{e}^{-1}$.
3. $(\mathrm{e}^{5x} \times \mathrm{e}^{2x})^4 \times \mathrm{e}^{4x}$.
4. $\dfrac{\mathrm{e}^6}{\mathrm{e}^2}$.
5. $\dfrac{(\mathrm{e}^3)^2}{\mathrm{e}^{-2}}$.
6. $\dfrac{\mathrm{e}^{-2x} \times (\mathrm{e}^3)^4}{\mathrm{e}^{2x}}$.

Exercice 10.3. Dériver les fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x + 3$.
2. $g(x) = 3\mathrm{e}^x$.
3. $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{3}$.

Exercice 10.4. Déterminer le signe des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$.

1. $f(x) = \mathrm{e}^x + 3$.
2. $g(x) = 3\mathrm{e}^{-5x}$.
3. $h(x) = -\dfrac{2}{\mathrm{e}^{-x^2}}$.

Exercice 10.5. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-2}$.
2. $\mathrm{e}^x + 4 = 0$.
3. $\mathrm{e}^{3x+3} = \mathrm{e}$.
4. $4\mathrm{e}^{-2x} = 4$.
5. $\mathrm{e}^x \leq \mathrm{e}^{-1}$.
6. $\mathrm{e}^x + 1 \geq 0$.
7. $\mathrm{e}^{3x-4} > \mathrm{e}$.
8. $-2\mathrm{e}^{x+8} < 6$.
9. $\mathrm{e}^{x^2-3x-1} = 1$.

Exercice 10.6. Étudier les variations des fonctions suivantes.

1. $f(x) = \mathrm{e}^{7x}$.
2. $g(x) = -3\mathrm{e}^{4x-2}$.
3. $h(x) = \mathrm{e}^{x^2-2}$.

10.6.2 Approfondissement

Exercice 10.7. Simplifier les expressions suivantes.

1. $u_n = \mathrm{e}^{2n+1} \times \mathrm{e}^{3n-4}$.
2. $v_n = (\mathrm{e}^{2n-1})^2 \times \mathrm{e}^{3n+4}$.
3. $w_n = \dfrac{e^{5n-3}}{\mathrm{e}^{-2n+1}}$.

Exercice 10.8. Développer et réduire les expressions suivantes.

1. $A(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 + (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$.
2. $B(x) = (\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})^2 - (\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})^2$.

Exercice 10.9. Démontrer les égalités suivantes pour tout réel x.

1. $\dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x} = 1 - \mathrm{e}^{-x}$.
2. $\dfrac{1}{\mathrm{e}^x + 1} = \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^{2x} - 1}$.

Exercice 10.10. Donner les ensembles de définitions et dérivations des fonctions suivantes puis les dériver.

1. $f_1(x) = \sqrt{x} - \mathrm{e}^x$.
2. $f_2(x) = x\mathrm{e}^x$.
3. $f_3(x) = (x^2 - 3x + 5)\mathrm{e}^x$.
4. $f_4(x) = \mathrm{e}^x\sqrt{x}$.
5. $f_5(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2 + 1}$.
6. $f_6(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\mathrm{e}^x}$.
7. $f_7(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x + 1}{\mathrm{e}^x - 1}$.

Exercice 10.11. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $(\mathrm{e}^x + 1)(\mathrm{e}^x - 1) = 0$.
2. $(3x + 1)\mathrm{e}^{-x^2+\sqrt{x}} = 0$.
3. $(2x + 1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.
4. $-\mathrm{e}^{x^2+3} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x+3}}$.

Exercice 10.12. Résoudre les inéquations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $x^2\mathrm{e}^{-2x+5} \leq 0$.
2. $\dfrac{x-3}{\mathrm{e}^{-x^2}} < 0$.
3. $(2x+1)\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^x$.
4. $(\mathrm{e}^{-x}-1)(\mathrm{e}^{3x+1}+1) > 0$.

Exercice 10.13. Donner les domaines de définitions puis étudier les variations et signes des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = -4\mathrm{e}^{-3x+1}$.
2. $f_2(x) = x\mathrm{e}^{x^2-2x+3}$.
3. $f_3(x) = -4\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$.
4. $f_4(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$.
5. $f_5(x) = \mathrm{e}^{-2x^3+4x^2-x+5}$.
6. $f_6(x) = \sqrt{1-x}\,\mathrm{e}^{\sqrt{1-x}}$.

Exercice 10.14. [Écologie] Le hérisson européen est une espèce menacée dont les études de population ont principalement été menées au Royaume-Uni. Les principales causes de sa disparition sont le trafic automobile et l'utilisation de pesticides. Le nombre de hérissons au Royaume-Uni a pu être modélisé par la fonction

$$H(t) = 35\mathrm{e}^{-0{,}053t}, \qquad t \in [0\,;+\infty[,$$

où t est le temps en année depuis 1950 ; ainsi $H(0)$ est le nombre de hérisson en million au Royaume-Uni en 1950.

1. Calculer le nombre de hérisson en 1950.
2. Étudier les variations de la fonction H. Qu'en déduisez-vous pour les hérissons.
3. Selon des études, la population de hérissons est passée d'environ 35 millions d'individus en 1950 à environ un million en 2017. Retrouver ces résultats avec le modèle.
4. Selon le modèle, en quelle année le nombre de hérissons au Royaume-Uni passera-t-il sous la barre des 100000 individus ?

Exercice 10.15. [Physique] La désintégration radioactive est un phénomène naturel au cours duquel des noyaux d'atomes se transforment en autres noyaux via une émission de particules et d'énergie.

On considère un échantillon de N_0 noyaux radioactifs au temps $t = 0$. On sait que le nombre $N(t)$ de noyaux radioactifs vérifie en tout temps t l'équation :

$$(E) \qquad \tau N'(t) + N(t) = 0,$$

où $N(0) = N_0$ et τ (lettre grecque « tau ») est un réel strictement positif appelé constante radioactive qui dépend de l'élément radioactif considéré.

1. Montrer que la fonction $N(t) = N_0 \exp\left(\dfrac{-t}{\tau}\right)$ vérifie l'équation (E).
2. Démontrer que N est décroissante. Quelle interprétation peut-on en faire ?
3. On note $\ln(2)$ l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^x = 2$. Montrer que le nombre de noyaux radioactifs a été divisé par deux par rapport à son nombre initial lorsque $t = \tau\ln(2)$. On appelle ce réel temps de demi-vie de l'élément radioactif.
4. (*) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la tangente à la courbe représentative de N en $t = 0$ avec l'axe des abscisses. On appelle ce point « durée de vie moyenne de l'échantillon ».

Exercice 10.16. [Chimie et Archéologie] Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14, un élément radioactif se désintégrant selon les mécanismes décrits dans l'exercice ci-dessus. À la mort de l'organisme, le carbone 14 présent dans celui-ci n'est plus renouvelé et il se désintègre.

Pour un certain être vivant, on estime la concentration de carbone 14 à l'intérieur de son organisme à 15,3 unités lors de sa vie et on admet qu'une fois mort, la concentration en donnée par la fonction

$$C(t) = 15,3\mathrm{e}^{-0,124t}, \qquad t \in [0\,;+\infty[,$$

où t est en millier d'années.

1. Étudier les variations de la fonction C.
2. Donner l'allure de la représentation graphique de C.
3. Des archéologues mesurent la concentration en carbone 14 d'un os à 7,27 unités. Estimer l'âge de cette os.
4. Lorsque la concentration en carbone 14 devient inférieure à $0,3\%$ de son niveau originel, on ne peut plus dater à l'aide du carbone 14. Déterminer à partir de quel âge la datation devient impossible pour notre organisme.

Exercice 10.17. [Algorithme] Le nombre e peut être approché à le nombre $u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers l'infini.

1. Calculer u_1 et u_2. Cette approximation vous semblent-elles satisfaisantes ? Justifier.
2. Pour $n = 100$, avec quelle précision u_n approche e ? Même question pour $n = 10000$.
3. Écrire un algorithme donnant quelle valeur de n la précision de l'approche de e par u_n est de l'ordre de 10^{-5}. Le programmer.

10.6.3 Entraînement

Exercice 10.18. Simplifier ou développer et réduire les expressions suivantes.

1. $u_n = \mathrm{e}^{3n+2} \times \mathrm{e}^{-6n-4}$.
2. $v_n = (\mathrm{e}^{n+1})^3 \times \mathrm{e}^{7n-2}$.
3. $w_n = \dfrac{(\mathrm{e}^{n+4})^2}{\mathrm{e}^{-4n+5}}$.
4. $x_n = (\mathrm{e}^n - 1)(\mathrm{e}^n + 1)$.
5. $y_n = (\mathrm{e}^n + e^{2n})^2$.
6. $z_n = (\mathrm{e}^{-2n} - \mathrm{e}^n)(\mathrm{e}^{-2n} + \mathrm{e}^n)$.

Exercice 10.19. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^{-4}$.
2. $10 + \mathrm{e}^x = 0$.
3. $\mathrm{e}^{-5x+4} = \mathrm{e}$.
4. $4\mathrm{e}^{x^2} = 4$.
5. $(\mathrm{e}^{4x} - 1)(\mathrm{e}^{2x} + 1) = 0$.
6. $(7 - 14x)\mathrm{e}^{-\cos(x)+\sqrt{x}} = 0$.
7. $(-3x^2 + 5x + 1)\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x$.
8. $-\mathrm{e}^{2-x^2} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2-x}}$.

Exercice 10.20. Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{R}$.

1. $\mathrm{e}^{x+1} < \mathrm{e}^{12}$.
2. $10 + \mathrm{e}^x > 0$.
3. $\mathrm{e}^{5x-1} \leq \mathrm{e}$.
4. $4\mathrm{e}^{x^2} \geq 4$.
5. $(\mathrm{e}^{4x} - 1)(\mathrm{e}^{2x} + 1) \leq 0$.
6. $(14 - 7x)\mathrm{e}^{-\cos(x)+\sqrt{x}} < 0$.
7. $(-3x^2 + 5x + 1)\mathrm{e}^x \geq \mathrm{e}^x$.
8. $-\mathrm{e}^{2-x^2} < \dfrac{1}{\mathrm{e}^{2-x}}$.

Exercice 10.21. Donner les domaines de définitions puis étudier les variations et signes des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = 2\mathrm{e}^{5x-2}$.
2. $f_2(x) = (x-1)\mathrm{e}^{4x^2-16}$.
3. $f_3(x) = \dfrac{x}{\mathrm{e}^x - 1}$.
4. $f_4(x) = 6\mathrm{e}^{\sqrt{x}+1}$.
5. $f_5(x) = \mathrm{e}^{2x^3-3x^2+2x+4}$.
6. $f_6(x) = \sqrt{x+3}\,\mathrm{e}^{\sqrt{x+3}}$.

10.7 Étude

En 1838, le mathématicien Pierre-François Verhulst propose d'étudier la croissance d'une population soumise à une limitation des ressources grâce à l'équation suivante :

$$(E) \qquad P'(t) = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right),$$

où $P(t)$ est la population en fonction du temps t, $r > 0$ le taux de croissance et $K > 0$ la capacité d'accueil de la population en lien avec les ressources disponibles.

On appelle P_0 la population initiale. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \frac{KP_0\mathrm{e}^{rt}}{K + P_0(\mathrm{e}^{rt} - 1)}$$

1. Quelle est le signe de f sur $\mathbb{R}$? Est-ce cohérent avec la modélisation d'une population ?
2. Montrer que f est solution de (E).
3. Que se passe-t-il lorsque $P_0 = K$? Quelle interprétation concrète peut-on faire ?
4. On souhaite étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
   (a) Quelles sont les variations de f si $K > P_0$? Interpréter.
   (b) Quelles sont les variations de f si $K < P_0$? Interpréter.