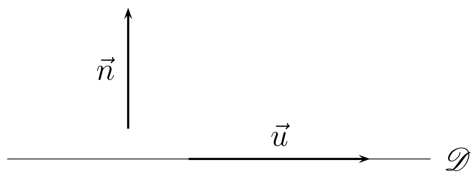
Chapitre 11

Application du produit scalaire

11.1 Équations de droites

Définition 11.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{n}$ deux vecteurs non nuls du plan et $\mathscr{D}$ une droite dirigée par $\vec{u}$. On dit que $\vec{n}$ est un* ***vecteur normal*** *à $\mathscr{D}$ s'il est orthogonal à $\vec{u}$.*



Pour les deux propriétés ci-dessous, le plan est supposé muni d'un repère orthonormé.

Propriété 11.1. *Soient a, b, c trois nombres réels (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) et $\mathscr{D}$ la droite d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$. Alors le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ est normal à $\mathscr{D}$.*

Démonstration. D'après une propriété vue au chapitre dans un chapitre précédent, la droite $\mathscr{D}$ admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$. Les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ sont bien orthogonaux :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = b \times a + (-a) \times b = 0.$$

□

Propriété 11.2. *Soient a, b deux nombres réels (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) et $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$. Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan dont $\vec{n}$ est un vecteur normal. Alors il existe un réel c tel que $ax + by + c = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $M(x\,;y)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$; le vecteur $\overrightarrow{AM}$ dirige donc $\mathscr{D}$. Par hypothèse, $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ sont orthogonaux. D'où :

$$\begin{aligned} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0 &\iff a(x - a_A) + b(y - y_A) = 0 \\ &\iff ax + by + (-ax_A - by_A) = 0. \end{aligned}$$

Il suffit alors de choisir $c = -ax_A - by_A$. Si $M = A$ l'équation est aussi vérifiée. □

Remarque Tout comme une droite admet une infinité de vecteurs directeurs, elle admet aussi une infinité de vecteurs normaux. Ceux-ci sont tous colinéaires deux à deux.

★ Vidéo.

11.2 Équations de cercles

Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Propriété 11.3. *Soit $A(x_A\,;y_A)$ un point du plan et r un nombre réel positif. Le cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon r a pour équation :*

$$(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2.$$

Démonstration. Soit $M(x\,;y)$ un point du plan :

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff AM=r \\ &\iff \sqrt{(x-x_A)^2+(y-y_A)^2}=r \\ &\iff (x-x_A)^2+(y-y_A)^2=r^2. \end{aligned}$$

□

Propriété 11.4. *Soient $A(x_A\,;y_A)$ de $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. Soit M un point du plan. Alors :*

$$M\in\mathscr{C} \iff \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0.$$

Démonstration. Un point M distinct de A et B appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si le triangle ABM est rectangle en M, si et seulement si $\overrightarrow{MA}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont orthogonaux. □

Exemple : Soient $A(3\,;4), B(5\,;1)$ et $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[AB]$. On cherche une équation de $\mathscr{C}$. Soit $M(x\,;y)$. On sait que $M\in\mathscr{C}$ si et seulement si $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0$. On a :

$$\overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}3-x\\4-y\end{pmatrix},\quad \overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}5-x\\1-y\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} M\in\mathscr{C} &\iff (3-x)(5-x)+(4-y)(1-y)=0 \\ &\iff x^2-8x+y^2-5y+19=0 \\ &\iff (x-4)^2-16+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2+19=0 \\ &\iff (x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{13}{4} \\ &\iff (x-4)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{13}}{2}\right)^2. \end{aligned}$$

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

11.3 Compléments de trigonométrie

11.3.1 Formules d'addition

Propriété 11.5. *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$;
2. $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$;
3. $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$;
4. $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$.

Démonstration.

1. Soient A et B les points du cercle trigonométrique associés à a et b : $A(\cos(a)\,;\sin(a))$ et $B(\cos(b)\,;\sin(b))$. On a donc
$$OA = 1, \quad OB = 1 \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = b - a[2\pi].$$
On en déduit que
$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) = \cos\left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right).$$
Il suffit alors d'appliquer la formule du produit scalaire avec les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ pour obtenir le résultat.
2. Comme la cos est paire et sin est impaire, il suffit de remplacer b par $-b$ dans *1*.
3. Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x),$$
en remplaçant a par $\frac{\pi}{2} - a$ dans *1*, on obtient :
$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - [a+b]\right)\\ &= \cos\left(\left[\frac{\pi}{2} - a\right] - b\right)\\ &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b) + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right)\cos(b)\\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b).\end{aligned}$$
4. On obtient *4* en remplaçant b par $-b$ dans *3*.

□

Corollaire 11.1. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(x \pm \pi) = -\cos(x)$;
2. $\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp\sin(x)$;
3. $\sin(x \pm \pi) = -\sin(x)$;
4. $\sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm\cos(x)$.

Démonstration. Exercice. □

★ Vidéo.

11.3.2 Formules de duplication

Propriété 11.6. *Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a*

1. $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$;
2. $\sin(2a) = 2\sin(a) \times \cos(a)$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple : On souhaite résoudre dan $[0\,;2\pi]$ l'équation trigonométrique

$$\cos(2x) = \sin(x).$$

On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$ donc l'équation ci-dessus est équivalente à

$$2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0.$$

Posons $X = \sin(x)$, on doit alors résoudre

$$2X^2 + X - 1 = 0.$$

On a $\Delta = 9$ donc deux racines : $X_1 = -1$ et $X_2 = \dfrac{1}{2}$.
On a donc deux possibilités :

$$\sin(x) = -1 \quad \text{ou} \quad \sin(x) = \frac{1}{2}.$$

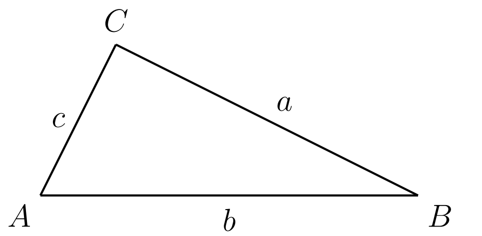
Donc $x \in \left\{-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{6}; \dfrac{5\pi}{6}\right\}$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

11.3.3 Formule d'Al Kashi

Propriété 11.7. *Pour tout triangle ABC, on a*

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}.$$



Remarque : le théorème de Pythagore en est un cas particulier dont la démonstration est laissée en exercice.

★ Vidéo.

11.4 Attendus et savoir-faire

- Déterminer une équation de droite connaissant un vecteur normal et un point et réciproquement.
- Déterminer l'équation d'un cercle connaissant son centre ou deux points diamétralement opposés.
- Connaître et manipuler les formules de duplication des sinus et cosinus.

11.5 Exercices

11.5.1 Démarrage

Exercice 11.1. Pour chacun des cas ci-dessous, donner un vecteur normal à la droite $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D} : 7x + 3y + 4 = 0$.
2. $\mathscr{D} : -x + y - 5 = 0$.
3. $\mathscr{D} : x - 7y + 9 = 0$.
4. $\mathscr{D} : x - 4 = 0$.
5. $\mathscr{D} : 6y + 1 = 0$.

Exercice 11.2. Pour chacun des cas ci-dessous, donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.

1. $A(2\,;-3)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $A(-5\,;0)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
3. $A(4\,;1)$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.3. Dans chaque cas, déterminer si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux puis – si c'est la cas – le projeté orthogonal de C sur (AB).

1. $A(0\,;-5)$, $B(-6\,;7)$ et $C(8\,;1)$.
2. $A(5\,;-10)$, $B(-5\,;15)$ et $C(0\,;-12)$.

Exercice 11.4. Soient $\mathscr{D}$ la droite d'équation $2x + y + 5 = 0$ et H le projeté orthogonal de $M(2\,;-4)$ sur $\mathscr{D}$. Montrer que H a pour coordonnées $H(0\,;-5)$.

Exercice 11.5. Pour chacune des équations de cercle suivantes, déterminer le rayon et les coordonnées du centre du cercle.

1. $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 9$.
2. $(x+2)^2 + (y-3)^2 - 4 = 0$.
3. $x^2 + (y-1)^2 - 1 = 0$.
4. $(x+3)^2 + y^2 - 16 = 0$.

Exercice 11.6. Dans chaque cas, déterminer l'équation du cercle de centre I et de rayon R.

1. $I(-2\,;3)$ et $R = 5$.
2. $I(1\,;2)$ et $R = \sqrt{3}$.
3. $I(0\,;-5)$ et $R = 2\sqrt{2}$.

Exercice 11.7. Déterminer si $P(1\,;2)$ appartient au cercle d'équation suivante :

1. $x^2 + y^2 - 8x - 6y + 15 = 0$.
2. $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 5 = 0$.

Exercice 11.8. Montrer que $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. En déduire $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

11.5.2 Approfondissement

Exercice 11.9. Pour chacun des cas ci-dessous, donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A(2\,;-3)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. $A(-5\,;0)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
3. $A(4\,;1)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.10. Pour chacun des cas ci-dessous, donner un vecteur normal et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ puis déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.

1. $\mathscr{D} \,:\, -3x+5y+4=0$ et $A\,(1\,;-1)$.
2. $\mathscr{D} \,:\, 7x-y-10=0$ et $A\,(2\,;-4)$.
3. $\mathscr{D} \,:\, -x-3=0$ et $A\,(5\,;7)$.
4. $\mathscr{D} \,:\, 2y+8=0$. et $A\,(2\,;0)$.

Exercice 11.11. Déterminer le réel m pour que $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ m \end{pmatrix}$ soit normal à la droite d'équation $x-2y-1=0$.

Exercice 11.12. Déterminer le projeté orthogonal du point $O\,(0\,;0)$ sur la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\mathscr{D} \,:\, 7x+3y+4=0$.
2. $\mathscr{D} \,:\, -x+y-5=0$.
3. $\mathscr{D} \,:\, x-4=0$.

Exercice 11.13. Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.

1. $A\,(3\,;-2)$ et $B\,(-5\,;6)$.
2. $A\,(1\,;0)$ et $B\,(0\,;-5)$.
3. $A\,(-2\,;2)$ et $B\,(1\,;-1)$.

Exercice 11.14. Déterminer si les équations suivantes sont des équations de cercle et le cas échéant, préciser leur centre et rayon.

1. $x^2+y^2-6x+8y=0$.
2. $x^2+y^2-4x+6y+8=0$.
3. $x^2+y^2+12x-4y+50=0$.
4. $x^2+y^2+2x+2y+2=0$.

Exercice 11.15. Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du cercle $\mathscr{C}$ d'équations suivantes.

1. $\mathscr{D} \,:\, 7x+3y+4=0$ et $\mathscr{C} \,:\, (x+3)^2+(y+4)^2=5$.
2. $\mathscr{D} \,:\, -x+y+2=0$ et $\mathscr{C} \,:\, (x-4)^2+(y-1)^2=4$.
3. $\mathscr{D} \,:\, 3y+1=0$ et $\mathscr{C} \,:\, x^2+\left(y+\dfrac{1}{3}\right)^2=1$.

Exercice 11.16. En utilisant les résultats de l'exercice 11.8, déterminer les cosinus et sinus suivants.

1. $\cos\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{5\pi}{12}\right)$.
2. $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right)$.

Exercice 11.17. Résoudre les équations trigonométriques suivantes.

1. $\cos(2x)=-\sin(x)$.
2. $\cos(2x)=2\cos(x)$.
3. $\cos(2x)=-2\sin(x)$.
4. $\sin(2x)=\cos(x)$.
5. $\sin(2x)=\sin(x)$.
6. $\cos(2x)=1-\sin(2x)$.

Exercice 11.18. [Démonstration] Démontrer le théorème de Pythagore à l'aide de la formule d'Al Kashi.

11.5.3 Entraînement

Exercice 11.19. Pour chacun des cas ci-dessous, donner l'équation de la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{d}$.

1. $A\,(0\,;3)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$.
2. $A\,(5\,;0)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$.
3. $A\,(1\,;4)$ et $\vec{d}\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Exercice 11.20. Pour chacun des cas ci-dessous, donner un vecteur normal et un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ puis déterminer une équation de la droite Δ perpendiculaire à $\mathscr{D}$ et passant par A.

1. $\mathscr{D}\ :\ 6x+9y+3=0$ et $A\,(-1\,;1)$.
2. $\mathscr{D}\ :\ -2x+y-10=0$ et $A\,(-2\,;4)$.
3. $\mathscr{D}\ :\ x+17=0$ et $A\,(-5\,;0)$.
4. $\mathscr{D}\ :\ -7y-1=0.$ et $A\,(0\,;2)$.

Exercice 11.21. Déterminer le projeté orthogonal du point $O\,(0\,;0)$ sur la droite $\mathscr{D}$ dans chacun des cas suivants.

1. $\mathscr{D}\ :\ -3x+2y+1=0.$
2. $\mathscr{D}\ :\ x-y+5=0.$
3. $\mathscr{D}\ :\ y+9=0.$

Exercice 11.22. Dans chaque cas, déterminer l'équation du cercle de centre I et de rayon R.

1. $I\,(3\,;2)$ et $R=1$.
2. $I\,(-1\,;-4)$ et $R=\sqrt{2}$.
3. $I\,(3\,;0)$ et $R=2\sqrt{3}$.

Exercice 11.23. Pour chacun des cas ci-dessous, déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.

1. $A\,(5\,;0)$ et $B\,(5\,;-6)$.
2. $A\,(9\,;3)$ et $B\,(0\,;1)$.
3. $A\,(2\,;-2)$ et $B\,(-1\,;1)$.

Exercice 11.24. Déterminer si les équations suivantes sont des équations de cercle et le cas échéant, préciser leur centre et rayon.

1. $x^2+y^2-4x+6y=0.$
2. $x^2+y^2-8x+3y+100=0.$

Exercice 11.25. Déterminer l'intersection de la droite $\mathscr{D}$ et du cercle $\mathscr{C}$ d'équations suivantes.

1. $\mathscr{D}\ :\ x+9y-6=0$ et $\mathscr{C}\ :\ (x+1)^2+y^2=9.$
2. $\mathscr{D}\ :\ 2x-y+2=0$ et $\mathscr{C}\ :\ (x+8)^2+(y-6)^2=6.$

Exercice 11.26. En utilisant les résultats de l'exercice 11.8, déterminer les cosinus et sinus suivants.

1. $\cos\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{11\pi}{12}\right)$.
2. $\cos\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{13\pi}{12}\right)$.