Chapitre 16

Arithmétique

16.1 Diviseurs et multiples

Définition 16.1. *Soient a, $b \in \mathbb{Z}$. On dit que a **divise** b si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$. On dit aussi dans ce cas que b est un **multiple** de a ; a est un **diviseur** de b ; b est **divisible** par a.*

Exemples :

1. 3 est un diviseur de 27 : $27 = 3 \times 9$;
2. 36 est multiple de 9 : $36 = 4 \times 9$.

Propriété 16.1. *Soient a, $b \in \mathbb{Z}$.*

1. *Si a divise b, alors $-a$ aussi.*
2. *Si a est un diviseur de b, alors tout diviseur de a est aussi un diviseur de b.*

Exemples :

1. 4 divise 12 donc -4 aussi : $12 = (-4) \times (-3)$.
2. 6 divise 42, 3 divise 6 donc 3 divise 42 : $42 = 3 \times 14$.

Démonstration. Le point 1 est évident, démontrons le 2. Soient a, $b \in \mathbb{Z}$, avec a diviseur de b. Soit c un diviseur de a, montrons que c divise aussi b. Par définition, ils existent $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = k \times a$ et $k' \in \mathbb{Z}$ tel que $a = k' \times c$. Ainsi

$$b = k \times a = k \times k' \times c = K \times c,$$

avec $K = k \times k' \in \mathbb{Z}$. On a donc $b = K \times c$, autrement dit, c divise b. □

Propriété 16.2. *Soient a, b, $c \in \mathbb{Z}$ tels que a et b soient des multiples de c. Alors $a + b$ est un multiple de c.*

Exemple : 121 et 99 sont deux multiples de 11 ($121 = 11^2$ et $99 = 9 \times 11$), donc $121 + 99 = 220$ est aussi un multiple de 11.

Démonstration. Soient a, b, $c \in \mathbb{Z}$ tels que a et b soient des multiples de c. Ils existent donc k, $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = k \times c$ et $b = k' \times c$. On a donc

$$a + b = k \times c + k' \times c = (k + k') \times c = K \times c,$$

avec $K = k + k'$. Donc $a + b = K \times c$, i.e. $a + b$ est un multiple de c. □

★ Vidéo.

16.2 Nombres pairs et impairs

Définition 16.2. *Soit $a \in \mathbb{Z}$.*

— *a est **pair** s'il est divisible par 2 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$.*

— *a est **impair** s'il n'est pas divisible par 2 : il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k + 1$.*

Propriété 16.3.

1. *Le produit de deux nombres impairs est impair.*
2. *Le produit de d'un nombre pair et d'un nombre quelconque est pair.*
3. *La somme de deux nombres de même parité est paire.*

Démonstration.

1. Soient a et b deux nombres impairs, ils existent k, $k' \in \mathbb{Z}$ tels que $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$. On a donc

$$ab = (2k + 1)(2k' + 1) = 4kk' + 2k + 2k' + 1 = 2(2kk' + k + k') + 1 = 2K + 1,$$

avec $K = 2kk' + k + k' \in \mathbb{Z}$. Donc $ab = 2K + 1$, i.e. ab est impair.

2. Soit a un nombre pair et $b \in \mathbb{Z}$ quelconque. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = 2k$. On a

$$ab = 2kb = 2K \quad \text{avec} \quad K = bk.$$

Donc ab est pair.

3. Exercice.

□

16.3 Nombres premiers

Définition 16.3. *Un entier naturel est* **premier** *s'il possède exactement deux diviseurs distincts : 1 et lui-même.*

Exemples : 2, 3, 5, 7 , 11 et 13 sont des nombres premiers.

Propriété 16.4. *Aucun nombre pair n'est premier à l'exception de 2.*

Démonstration. Exercice. □

Propriété 16.5. ***[Admise]*** *Tout nombre entier est soit premier soit décomposable en produit de facteurs premiers.*

Exemple : 150 n'est pas premier puisqu'il est divisible par 2. Il se décompose en

$$150 = 10 \times 15 = 2 \times 5 \times 3 \times 5 = 2 \times 3 \times 5^2.$$

Application : La décomposition en produit de facteurs premiers permet d'écrire des fractions sous **forme irréductible**. Mettons sous forme irréductible $\frac{1020}{150}$. On sait déjà que $150 = 2\times3\times5^2$; on a de plus

$$1020 = 10 \times 102 = 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 17 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 17.$$

On a donc

$$\frac{1020}{150} = \frac{2^2 \times 3 \times 5 \times 17}{2 \times 3 \times 5^2} = \frac{2 \times 17}{5} = \frac{34}{5}.$$

★ Vidéo.

16.4 Attendus et savoir-faire

- Connaître et utiliser les définitions de diviseur et de multiple.
- Montrer qu'un nombre est diviseur ou multiple d'un autre.
- Connaître et utiliser les définitions de nombres pair et impair.
- Connaître la définition d'un nombre premier et les premiers nombres premiers.
- Décomposer un nombre en produit de facteur premier.
- Écrire une fraction sous forme irréductible.

16.5 Exercices

16.5.1 Démarrage

Exercice 16.1.

1. Donner tous les diviseurs de 18.
2. Donner tous les diviseurs de 20.
3. Donner tous les multiples de 20 jusqu'à 100.
4. Donner tous les multiples de 18 jusqu'à 100.

Exercice 16.2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $25n + 45$ est un multiple de 5.
2. Montrer que $154n + 28$ est un multiple de 14.

Exercice 16.3. Sachant que 144 et 168 sont deux multiples de 12, donner trois autres multiples de 12.

Exercice 16.4.

1. Donner tous les entiers pairs entre 0 et 10 compris.
2. Donner tous les entiers impairs entre 10 et 20.
3. Donner tous les entiers pairs entre 55 et 66 compris.

Exercice 16.5. Donner tous les nombres premiers compris entre 10 et 30.

Exercice 16.6. Donner les décompositions en produit de facteurs premiers de : 63, 71, 94, 144.

Exercice 16.7. Écrire sous forme de fraction irréductible les fractions suivantes : $\frac{45}{72}, \frac{33}{84}, \frac{147}{28}$.

16.5.2 Approfondissement

Exercice 16.8. Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer que les nombres suivants sont des multiples de 3.

$$A = 12n + 18, \quad B = (15n + 6) - (6n + 21), \quad C = (3n + 6)(6n - 1).$$

Exercice 16.9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Développer $(2n + 3)(5n + 1)$.
2. En déduire que $2n + 3$ et $5n + 1$ sont des diviseurs de $10n^2 + 17n + 3$.

Exercice 16.10.

1. Donner deux multiples de 11 plus grand que 100.
2. À partir des ces deux multiples, donner trois autres multiples de 11.

Exercice 16.11. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $28n + 42$ est un multiple de 7.
2. En déduire que $(28n + 42)^2$ est un multiple de 7.
3. (*) Montrer que $(28n + 42)^2 - 5(28n + 42) + 56$ est un multiple de 7.

Exercice 16.12. [Algorithme]

1. (a) Quel est le reste de la division euclidienne de 16 par 5 ?
   (b) Quel est le reste de la division euclidienne de 15 par 5 ?
   (c) En déduire un critère pour déterminer si un nombre m est multiple d'un nombre d.
2. Écrire un algorithme disant si un nombre m est multiple d'un nombre d.
3. Coder cet algorithme en Python. *Indication :* pour obtenir le reste de la division euclidienne de y par x en Python, on fait $y\%x$; par exemple 16%5 donne 1.

Exercice 16.13. Sans effectuer les calculs suivants, dire si les résultats seront pairs ou impairs, justifier.

1. $151 + 903$;
2. $337 + 804$;
3. $730 + 438$;
4. 422×591 ;
5. 527×839 ;
6. 977×192 ;
7. $1094 \times 5049 + 9308$;
8. $7308 \times 2103 + 4209$.

Exercice 16.14. [Démonstration] Montrer que le carré d'un nombre impair est impair sans utiliser la propriété du cours. Même question pour un nombre pair.

Exercice 16.15. [Démonstration]

1. Montrer que la somme de deux entiers pairs est paire.
2. Montrer que la somme de deux entiers impairs est paire.

Exercice 16.16. Décomposer en produit de facteur premier 13000 et 21216.

Exercice 16.17. Mettre sous forme irréductible $\dfrac{990}{1430}$.

Exercice 16.18. Les affirmations sont-elles vraies ou fausse ? Justifier.

1. Si a et b sont deux nombres premiers distincts, alors la fraction $\dfrac{a}{b}$ est irréductible.
2. Si a et b sont deux nombres premiers différents de 2, alors $a + b$ n'est jamais premier.
3. Si $n \in \mathbb{N}\backslash\{0\,, 1\}$ est premier, alors $2^n - 1$ l'est aussi.

Exercice 16.19. [Démonstration] Démontrer que $\dfrac{1}{3}$ n'est pas décimal. *Indication :* on pourra raisonner par l'absurde, i.e. supposer que $\dfrac{1}{3}$ est décimal et montrer qu'on arrivera à une contradiction.

Exercice 16.20. [Démonstration] Démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. *Indication :* on pourra raisonner par l'absurde, i.e. supposer que $\sqrt{2}$ est rationnel et montrer qu'on arrivera à une contradiction.

Exercice 16.21. La conjecture de Goldbach affirme que « tout nombre pair supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers ».

1. Vérifier cette conjecture pour tous les nombres pairs de $[10\,;20]$.
2. Trouver tous les nombres premiers p_1 et p_2 tels que $100 = p_1 + p_2$.

16.5.3 Entraînement

Exercice 16.22. Donner tous les diviseurs de 28, 52, 69, 96.

Exercice 16.23. Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $42n + 36$ est un multiple de 6.
2. Montrer que $121n + 99$ est un multiple de 11.
3. Montrer que $(28n + 82) - (14n + 42)$ est un multiple de 14.
4. Montrer que $(81n + 27)(50n + 45)$ est un multiple de 9.

Exercice 16.24. Sachant que 169 et 195 sont deux multiples de 13, donner trois autres multiples de 13.

Exercice 16.25. Sans effectuer les calculs suivants, dire si les résultats seront pairs ou impairs, justifier.

1. $115 + 309$;
2. $373 + 408$;
3. $936 + 452$;
4. 242×951 ;
5. 257×389 ;
6. 798×921 ;
7. $9104 \times 4095 + 3903$;
8. $8037 \times 3210 + 9406$.

Exercice 16.26. Donner les décompositions en produit de facteurs premiers de : 58, 84, 95, 195.

Exercice 16.27. Écrire sous forme de fraction irréductible les fractions suivantes :

$$\frac{72}{45},\quad \frac{96}{15},\quad \frac{150}{195},\quad \frac{63}{42},\quad \frac{121}{56},\quad \frac{51}{85}.$$