Colinéarité

1 Colinéarité

Définition 9.1. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.*

Exemples : On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

1. $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}$ car $\vec{v} = 2\vec{u}$.
2. $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

Remarque : Deux vecteurs colinéaires ont la même direction mais pas forcément le même sens et la même norme.

Définition 9.2. *Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.*
*Le réel $xy' - x'y$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

Propriété 9.1. *Soient deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$*. Alors* $\vec{u}$ *et* $\vec{v}$ *sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul i.e.* $xy' - x'y = 0$*.*

Exemple : On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$**,** $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ **et** $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$**. On applique le critère de colinéarité à** $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **:**

$$2 \times (-6) - 3 \times (-4) = -12 + 12 = 0,$$

donc $\vec{u}$ **et** $\vec{v}$ **sont colinéaires .**
Appliquons le derechef avec $\vec{u}$ **et** $\vec{w}$ **:**

$$2 \times 6 - 3 \times 0 = 12 \neq 0,$$

donc $\vec{u}$ **et** $\vec{w}$ **ne sont pas colinéaires .**

Démonstration.

$\Longrightarrow$: On suppose que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, alors l'égalité est immédiatement vérifiée. S'il s'agit de deux vecteurs non nuls, alors il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, d'où

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases}$$

Donc $xy' - x'y = xky - kxy = 0$.

$\Longleftarrow$: Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les coordonnées vérifient

$$xy' - x'y = 0.$$

Si l'un des deux est le vecteur nul, alors il est colinéaire à l'autre car par définition le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs. Si ni l'un ni l'autre n'est le vecteur nul ; l'une de leur coordonnée, au moins, est donc non nulle : on peut supposer $x \neq 0$. On a alors

$$xy' - x'y = 0 \Longleftrightarrow xy' = x'y \Longleftrightarrow y' = \frac{x'}{x}y.$$

On note k le rapport $\frac{x'}{x}$, on a donc $y' = ky$. Comme par définition de k, on a $x' = kx$, on en déduit que $\vec{v} = k\vec{u}$, autrement dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

$\square$

★ **Vidéo.**

2 Applications de la colinéarité

Propriété 9.2.

- *Soient* A, B, M *trois points du plan. Les points* A, B, M *sont alignés si et seulement si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AM}$ *sont colinéaires.*
- *Soient* A, B, C, D *quatre points du plan avec* $A \neq B$ *et* $C \neq D$*. Les droites* (AB) *et* (CD) *sont parallèles si et seulement si* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*

Exemples :

1. **Soient** $A(1\,;5), B(5\,;11)$ **et** $C(-1\,;2)$ **trois points. On a :**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix} \quad \textbf{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-3\end{pmatrix}.$$

On a : $4\times(-3)-6\times(-2)=-12+12=0$. **On en déduit que les vecteurs** $\overrightarrow{AB}$ **et** $\overrightarrow{AC}$ **sont colinéaires et donc que les points** A, B **et** C **sont alignés .**

2. **Soient $A(1\,;3)$, $B(2\,;5)$, $C(-1\,;4)$ et $D(2\,;10)$ quatre points. On a :**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}.$$

On a : $1\times 6-2\times 3=6-6=0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et donc que les droites (AB) et (CD) sont parallèles .

3 Attendus et savoir-faire

- **Utiliser le critère de colinéarité pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires ou non.**
- **Donner des exemples de vecteurs colinéaires et non colinéaires.**
- **Dire si trois points sont alignés ou non.**
- **Dire si deux droites sont parallèles ou non.**
- **Déterminer les coordonnées d'un point de façon à ce qu'il soit aligné avec deux autres points ou que deux droits soient parallèles.**

4 Exercices

4.1 Démarrage

Exercice 9.1. Soient $A(2\,;-1)$ et $B(5\,;2)$ deux points du plan.

1. Placer A et B dans un repère et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Tracer deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.
3. Tracer un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 9.2. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs ci-dessous sont colinéaires ou non.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \overline{2} \end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \overline{4} \end{pmatrix}$.

Exercice 9.3. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points A, B et C sont alignés.

1. $A\,(2\,;13)$, $B\,(-2\,;-7)$ et $C\,(11\,;58)$.
2. $A\,(9\,;20)$, $B\,(2\,;-1)$ et $C\,(25\,;71)$.

Exercice 9.4. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites (AB) et (MN) sont parallèles.

1. $A\,(1\,;2)$, $B\,(5\,;8)$, $M\,(0\,;-1)$ et $N\,(5\,;6)$.
2. $A\,(3\,;-10)$, $B\,(15\,;5)$, $M\,(1\,;1)$ et $N\,(17\,;21)$.

4.2 Approfondissement

Exercice 9.5. Soient $R\,(-2\,;6)$, $S\,(7\,;3)$ et $T\,(-1\,;6)$ trois points du plan et U le point tel que $\overrightarrow{RU} = -\dfrac{5}{2}\overrightarrow{ST}$. Déterminer les coordonnées de U.

Exercice 9.6. Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vérifiant : $3\vec{u} + 4\vec{v} = \vec{0}$. Montrer que les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Exercice 9.7. Soient A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$. Et soit $\vec{u}$ un vecteur du plan tel que : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Montrer que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exercice 9.8. [Algorithme] Écrire un algorithme déterminant si deux vecteurs sont colinéaires connaissant leurs coordonnées.

Exercice 9.9. Dans chacun des cas suivants, déterminer si G appartient à la droite (EF).

1. $E\,(5\,;-3)$, $F\,(-3\,;3)$ et $G\,(15\,;-9)$.
2. $E\,(0\,;-7)$, $F\,(1\,;0)$ et $G\,(2\,;7)$.

Exercice 9.10. Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante de G pour qu'il appartienne à la droite (EF).

1. $E\,(3\,;-2)$, $F\,(5\,;4)$ et $G\,(x\,;-6)$.
2. $E\,(-1\,;0)$, $F\,(4\,;7)$ et $G\,(-2\,;y)$.

Exercice 9.11. [Algorithme] Écrire un algorithme déterminant si trois points sont alignés connaissant leurs coordonnées.

Exercice 9.12. On considère les points $A\,(0\,;6)$, $B\,(10\,;4)$, $C\,(0\,;6)$ et $D\,(2\,;0)$.

1. Calculer les coordonnées des points E et F définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

2. Montrer que D, E et F sont alignés.

Exercice 9.13. Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante de D pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

1. $A\,(3\,;-2)$, $B\,(5\,;4)$, $C\,(3\,;-6)$ et $D\,(x\,;7)$.
2. $A\,(-1\,;0)$, $B\,(4\,;7)$, $C\,(-2\,;3)$ et $D\,(0\,;y)$.

Exercice 9.14. [Algorithme] Écrire un algorithme déterminant si deux droites sont parallèles connaissant les coordonnées coordonnées de deux points appartenant à chacune d'entre elles.

Exercice 9.15. On considère les points $A\,(-3\,;-1)$, $B\,(-3\,;4)$, $C\,(1\,;2)$ et $D\,(1\,;-3)$. Soient E et F les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AD]$.

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.
2. Calculer les coordonnées de E et F.
3. Montrer que (AE) et (FC) sont parallèles.

Exercice 9.16.

1. Soient A, B et C trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}\right)$. Montrer que les points A, B et C sont alignés.
2. Soit ABC un triangle, D le point tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et E le point tel que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{BA}$. Montrer que C est le milieu du segment $[DE]$.

3. Soient A, B, C et D quatre points du plan vérifiant : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(5\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CB}\right)$. Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.

4.3 Entraînement

Exercice 9.17. Soient $A(-2\,;3)$ et $B(2\,;2)$ deux points du plan.

1. Placer A et B dans un repère et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Tracer deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.
3. Tracer un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 9.18. Soient $R(-1\,;7)$, $S(4\,;-3)$ et $T(1\,;6)$ trois points du plan et U le point tel que $\overrightarrow{RU} = \frac{2}{3}\overrightarrow{ST}$. Déterminer les coordonnées de U.

Exercice 9.19. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs ci-dessous sont colinéaires ou non.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

4. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{5}{4} \end{pmatrix}$.
5. $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -28 \\ 4 \end{pmatrix}$.
6. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$.

Exercice 9.20. Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante G pour qu'il appartienne à la droite (EF).

1. $E\,(8\,;-2)$, $F\,(1\,;4)$ et $G\,(x\,;0)$.
2. $E\,(-1\,;5)$, $F\,(6\,;7)$ et $G\,(0\,;y)$.

Exercice 9.21. Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante de D pour que les droites (AB) et (CD) soient parallèles.

1. $A\,(1\,;4)$, $B\,(-3\,;4)$, $C\,(0\,;6)$ et $D\,(x\,;0)$.
2. $A\,(1\,;0)$, $B\,(7\,;-4)$, $C\,(2\,;-1)$ et $D\,(-2\,;y)$.