# Chapitre 9

# Vecteurs et colinéarité

## 9.1 Colinéarité

**Définition 9.1.** *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un nombre réel $k$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$. Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.*

**Exemples :** On considère le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

1. $\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}$ car $\vec{v} = 2\vec{u}$.
2. $\vec{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$.

**Remarque :** Deux vecteurs colinéaires ont la même direction mais pas forcément le même sens et la même norme.

**Définition 9.2.** *Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Le réel $xy' - x'y$ est appelé **déterminant** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.*

**Propriété 9.1.** *Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$. Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si leur déterminant est nul i.e. $xy' - x'y = 0$.*

**Exemple :** On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$ et $\vec{w}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix}$. On applique le critère de colinéarité à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ :

$$2 \times (-6) - 3 \times (-4) = -12 + 12 = 0,$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

Appliquons le derechef avec $\vec{u}$ et $\vec{w}$ :

$$2 \times 6 - 3 \times 0 = 12 \neq 0,$$

donc $\vec{u}$ et $\vec{w}$ ne sont pas colinéaires.

*Démonstration.*

$\Longrightarrow$ **:** On suppose que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est le vecteur nul, alors l'égalité est immédiatement vérifiée. S'il s'agit de deux vecteurs non nuls, alors il existe un réel $k$ tel que $\vec{v} = k\vec{u}$, d'où

$$\begin{cases} x' = kx, \\ y' = ky. \end{cases}$$

Donc $xy' - x'y = xky - kxy = 0$.

$\Longleftarrow$ **:** Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs dont les coordonnées vérifient

$$xy' - x'y = 0.$$

Si l'un des deux est le vecteur nul, alors il est colinéaire à l'autre car par définition le vecteur nul est colinéaire à tous les vecteurs. Si ni l'un ni l'autre n'est le vecteur nul ; l'une de leur coordonnée, au moins, est donc non nulle : on peut supposer $x \neq 0$. On a alors

$$xy' - x'y = 0 \Longleftrightarrow xy' = x'y \Longleftrightarrow y' = \frac{x'}{x}y.$$

On note $k$ le rapport $\dfrac{x'}{x}$, on a donc $y' = ky$. Comme par définition de $k$, on a $x' = kx$, on en déduit que $\vec{v} = k\vec{u}$, autrement dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

□

★ Vidéo.

## 9.2 Applications de la colinéarité

**Propriété 9.2.**

— *Soient $A, B, M$ trois points du plan. Les points $A, B, M$ sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.*

— *Soient $A, B, C, D$ quatre points du plan avec $A \neq B$ et $C \neq D$. Les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.*

**Exemples :**

1. Soient $A(1\,;5), B(5\,;11)$ et $C(-1\,;2)$ trois points. On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

On a : $4 \times (-3) - 6 \times (-2) = -12 + 12 = 0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires et donc que les points $A, B$ et $C$ sont alignés.

2. Soient $A(1\,;3), B(2\,;5)$, $C(-1\,;4)$ et $D(2\,;10)$ quatre points. On a :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}.$$

   On a : $1\times 6 - 2\times 3 = 6-6 = 0$. On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires et donc que les droites $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

## 9.3 Attendus et savoir-faire

- Utiliser le critère de colinéarité pour savoir si deux vecteurs sont colinéaires ou non.
- Donner des exemples de vecteurs colinéaires et non colinéaires.
- Dire si trois points sont alignés ou non.
- Dire si deux droites sont parallèles ou non.
- Déterminer les coordonnées d'un point de façon à ce qu'il soit aligné avec deux autres points ou que deux droits soient parallèles.

## 9.4 Exercices

### 9.4.1 Démarrage

**Exercice 9.1.** Soient $A\,(2\,;-1)$ et $B\,(5\,;2)$ deux points du plan.

1. Placer $A$ et $B$ dans un repère et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Tracer deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.
3. Tracer un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

**Exercice 9.2.** Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs ci-dessous sont colinéaires ou non.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\-2\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\-2\end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

**Exercice 9.3.** Dans chacun des cas suivants, déterminer si les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.

1. $A\,(2\,;13)$, $B\,(-2\,;-7)$ et $C\,(11\,;58)$.
2. $A\,(9\,;20)$, $B\,(2\,;-1)$ et $C\,(25\,;71)$.

**Exercice 9.4.** Dans chacun des cas suivants, déterminer si les droites $(AB)$ et $(MN)$ sont parallèles.

1. $A\,(1\,;2)$, $B\,(5\,;8)$, $M\,(0\,;-1)$ et $N\,(5\,;6)$.
2. $A\,(3\,;-10)$, $B\,(15\,;5)$, $M\,(1\,;1)$ et $N\,(17\,;21)$.

### 9.4.2 Approfondissement

**Exercice 9.5.** Soient $R\,(-2\,;6)$, $S\,(7\,;3)$ et $T\,(-1\,;6)$ trois points du plan et $U$ le point tel que $\overrightarrow{RU} = -\frac{5}{2}\overrightarrow{ST}$. Déterminer les coordonnées de $U$.

**Exercice 9.6.** Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan vérifiant : $3\vec{u} + 4\vec{v} = \vec{0}$. Montrer que les vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

**Exercice 9.7.** Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AC}$. Et soit $\vec{u}$ un vecteur du plan tel que : $\vec{u} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$. Montrer que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

**Exercice 9.8. [Algorithme]** Écrire un algorithme déterminant si deux vecteurs sont colinéaires connaissant leurs coordonnées.

**Exercice 9.9.** Dans chacun des cas suivants, déterminer si $G$ appartient à la droite $(EF)$.

1. $E\,(5\,;-3)$, $F\,(-3\,;3)$ et $G\,(15\,;-9)$.
2. $E\,(0\,;-7)$, $F\,(1\,;0)$ et $G\,(2\,;7)$.

**Exercice 9.10.** Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante de $G$ pour qu'il appartienne à la droite $(EF)$.

1. $E\,(3\,;-2)$, $F\,(5\,;4)$ et $G\,(x\,;-6)$.
2. $E\,(-1\,;0)$, $F\,(4\,;7)$ et $G\,(-2\,;y)$.

**Exercice 9.11. [Algorithme]** Écrire un algorithme déterminant si trois points sont alignés connaissant leurs coordonnées.

**Exercice 9.12.** On considère les points $A\,(0\,;6)$, $B\,(10\,;4)$, $C\,(0\,;6)$ et $D\,(2\,;0)$.

1. Calculer les coordonnées des points $E$ et $F$ définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}.$$

2. Montrer que $D$, $E$ et $F$ sont alignés.

**Exercice 9.13.** Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante de $D$ pour que les droites $(AB)$ et $(CD)$ soient parallèles.

1. $A\,(3\,;-2)$, $B\,(5\,;4)$, $C\,(3\,;-6)$ et $D\,(x\,;7)$.
2. $A\,(-1\,;0)$, $B\,(4\,;7)$, $C\,(-2\,;3)$ et $D\,(0\,;y)$.

**Exercice 9.14. [Algorithme]** Écrire un algorithme déterminant si deux droites sont parallèles connaissant les coordonnées coordonnées de deux points appartenant à chacune d'entre elles.

**Exercice 9.15.** On considère les points $A\,(-3\,;-1)$, $B\,(-3\,;4)$, $C\,(1\,;2)$ et $D\,(1\,;-3)$. Soient $E$ et $F$ les milieux respectifs de $[BC]$ et $[AD]$.

1. Montrer que le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

2. Calculer les coordonnées de $E$ et $F$.
3. Montrer que $(AE)$ et $(FC)$ sont parallèles.

**Exercice 9.16.**

1. Soient $A$, $B$ et $C$ trois points du plan tels que : $\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}\right)$. Montrer que les points $A$, $B$ et $C$ sont alignés.
2. Soit $ABC$ un triangle, $D$ le point tel que $\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ et $E$ le point tel que $\overrightarrow{CE} = 3\overrightarrow{BA}$. Montrer que $C$ est le milieu du segment $[DE]$.
3. Soient $A, B, C$ et $D$ quatre points du plan vérifiant : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\left(5\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{CB}\right)$. Montrer que $(AB)$ et $(CD)$ sont parallèles.

### 9.4.3 Entraînement

**Exercice 9.17.** Soient $A\,(-2\,;3)$ et $B\,(2\,;2)$ deux points du plan.

1. Placer $A$ et $B$ dans un repère et tracer le vecteur $\overrightarrow{AB}$.
2. Tracer deux vecteurs colinéaires à $\overrightarrow{AB}$.
3. Tracer un vecteur non colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

**Exercice 9.18.** Soient $R\,(-1\,;7)$, $S\,(4\,;-3)$ et $T\,(1\,;6)$ trois points du plan et $U$ le point tel que $\overrightarrow{RU} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{ST}$. Déterminer les coordonnées de $U$.

**Exercice 9.19.** Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs ci-dessous sont colinéaires ou non.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.
4. $\vec{u}\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ -\dfrac{5}{4} \end{pmatrix}$.
5. $\vec{u}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -28 \\ 4 \end{pmatrix}$.
6. $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$.

**Exercice 9.20.** Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante $G$ pour qu'il appartienne à la droite $(EF)$.

1. $E\,(8\,;-2)$, $F\,(1\,;4)$ et $G\,(x\,;0)$.
2. $E\,(-1\,;5)$, $F\,(6\,;7)$ et $G\,(0\,;y)$.

**Exercice 9.21.** Dans chacun des cas suivants, déterminer la coordonnée manquante de $D$ pour que les droites $(AB)$ et $(CD)$ soient parallèles.

1. $A\,(1\,;4)$, $B\,(-3\,;4)$, $C\,(0\,;6)$ et $D\,(x\,;0)$.
2. $A\,(1\,;0)$, $B\,(7\,;-4)$, $C\,(2\,;-1)$ et $D\,(-2\,;y)$.