Équations de droites

1 Vecteur directeur d'une droite

Définition 12.1. *Soient $\mathscr{D}$ une droite et $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan. On dit que $\vec{u}$ est un* ***vecteur directeur*** *de $\mathscr{D}$ s'il existe deux points A et B de $\mathscr{D}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.*

Propriété 12.1. *Soient $\mathscr{D}$ une droite, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non nuls du plan. On suppose que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. Alors $\vec{v}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$ si et seulement si $\vec{v}$ est colinéaire $\vec{u}$.*

Exemples : Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan dont $\vec{u}_1\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.Alors $\vec{u}_2\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{u}_3\begin{pmatrix}4\\-6\end{pmatrix}$ sont des vecteurs directeurs de $\mathscr{D}$ car ils sont colinéaires à $\vec{u}_1$; *a contrario*, $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$ n'est pas un vecteur

directeur de $\mathscr{D}$ car il n'est pas colinéaire à $\vec{u}_1$.

Démonstration.

$\Longrightarrow$: On suppose que $\vec{v}$ dirige $\mathscr{D}$. Il existe donc quatre points A, B, C, D de $\mathscr{D}$ tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$. Ces points étant alignés, on en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ – et donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ – sont colinéaires .

$\Longleftarrow$: On suppose que $\vec{v}$ est colinéaire à $\vec{u}$. Comme $\vec{u}$ dirige $\mathscr{D}$, il existe deux points A et B de $\mathscr{D}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. Notons C l'image de A par la translation de vecteur $\vec{v}$, autrement dit $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$. Comme les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, on en déduit que les points A, B et C sont alignés et donc que $C \in (AB)$. Finalement $\vec{v} = \vec{AC}$ avec A et C points de $\mathscr{D}$. La droite $\mathscr{D}$ est bien dirigée par $\vec{v}$.

□

2 Équations cartésiennes

Théorème 12.1. *Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan. Alors il existe trois nombres réels a, b et c (avec $a \neq 0$ ou $b \neq 0$) tels que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points de* *coordonnées* $(x\,;y)$ *vérifiant*

$$ax + by + c = 0.$$

On appelle cette forme d'équation de $\mathscr{D}$ *une* ***équation cartésienne****.*

Exemples : $3x - y + 1 = 0$ **,** $2y + 5 = 0$ **et** $x-1=0$ **sont des équations cartésiennes où le triplet** $(a\,;b\,;c)$ **est respectivement égal à** $(3\,;-1\,;1)$ **,** $(0\,;2\,;5)$ **et** $(1\,;0\,;-1)$ **.**

Démonstration. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de $\mathscr{D}$ et $M(x\,;y)$ un point de $\mathscr{D}$.

$$\begin{aligned}
M \in \mathscr{D} &\iff A, B \text{ et } M \text{ sont alignés}\\
&\iff \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}\\
&\text{sont colinéaires}\\
&\iff (x_B - x_A)(y - y_A)\\
&- (y_B - y_A)(x - x_A) = 0\\
&\iff (y_A - y_B)x + (x_B - x_A)y\\
&+ y_A(x_A - x_B) + x_A(y_B - y_A) = 0\\
&\iff ax + by + c = 0,
\end{aligned}$$

en ayant choisi :

$$\begin{cases} a &= y_A - y_B \\ b &= x_B - x_A \\ c &= y_A(x_A - x_B) + x_A(y_B - y_A) = x_A y_B - x_B y_A. \end{cases}$$

On a bien $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ car les points A et B sont distincts. $\square$

Remarque : Le triplet $(a\,;b\,;c)$ n'est pas unique.

Propriété 12.2. *Soient* a, b *et* c *trois nombres réels avec* $a \neq 0$ *ou* $b \neq 0$. *Si* $ax + by + c = 0$ *est une équation cartésienne de la droite* $\mathscr{D}$, *alors le vecteur du plan* $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ *est un vecteur directeur de* $\mathscr{D}$.

Remarque : le vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de $\mathscr{D}$, en effet il est colinéaire à $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ puisque $\vec{v} = -\vec{u}$.

Démonstration. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points distincts de la droite $\mathscr{D}$. Par hypothèse, on a :

$$\begin{cases} ax_A + by_A + c = 0 \\ ax_B + by_B + c = 0 \end{cases}$$

Montrons que $\vec{u}\begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$ sont colinéaires :

$$\begin{aligned} b(y_B - y_A) - (-a)(x_B - x_A) &= by_B - by_A + ax_B - ax_A \\ &= ax_B + by_B - (ax_A + by_A) \\ &= -c - (-c) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par définition, $\overrightarrow{AB}$ dirige la droite $\mathscr{D}$ et $\vec{u}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. On en déduit que $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. □

Exemples :

1. **Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation** $3x-4y+2=0$. **Montrons que** $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1,5 \end{pmatrix}$ **est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$. D'après la propriété ci-dessus,** $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix}$ **est un vec-**

teur directeur de $\mathscr{D}$. Comme $\vec{v} = -2\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et donc $\vec{u}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}$.

2. Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ les droites du plan d'équations respectives :

$$5x + ky - 2 = 0 \quad \text{et} \quad kx + 2y + 1 = 0.$$

Pour quelle(s) valeur(s) de k les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont-elles parallèles ?

$\vec{u}_1 \begin{pmatrix} k \\ -5 \end{pmatrix}$ – respectivement $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -k \end{pmatrix}$ – est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$ – respectivement $\mathscr{D}_2$. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires si et seulement si

$$10 - k^2 = 0 \iff k = \pm\sqrt{10}.$$

Propriété 12.3. *Soient α et β deux nombres réels avec $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$. Si $\mathscr{D}$ est une droite dont un vecteur directeur a pour coordonnées $(\alpha\,;\beta)$, alors il existe un réel c tel que $\beta x - \alpha y + c = 0$ soit une équation cartésienne de $\mathscr{D}$.*

Démonstration. Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $M(x\,;y)$ deux points de $\mathscr{D}$. Si A et M sont distincts, alors $\overrightarrow{AM}$ dirige $\mathscr{D}$. Sinon, $\overrightarrow{AM}$ est le vecteur nul. Dans les deux cas, les vecteurs $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x - x_A \\ y - y_A \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ sont colinéaires :

$$\beta(x-x_A)-\alpha(y-y_A) = 0 \iff \beta x-\alpha y+\alpha y_A-\beta x_A = 0.$$

Ainsi les coordonnées de M vérifient l'équation $\beta x - \alpha y + c = 0$ en notant $c = \alpha y_A - \beta x_A$. $\square$

Exemple : Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par $A(3\,;4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Déterminons une équation cartésienne de $\mathscr{D}$ de deux façons différentes.

1. **Il existe un réel c tel que $1x - 2y + c = 0$ soit une équation de $\mathscr{D}$. Or $A \in \mathscr{D}$, on en déduit : $x_A - 2y_A + c = 0 \iff 3 - 2 \times 4 + c = 0 \iff c = 5$.**

2. **Soit $M(x\,;y)$ un point de $\mathscr{D}$. On sait que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ sont colinéaires, d'où :**

   $$1(x-3)-2(y-4)=0 \iff x-2y+5=0.$$

3 Équations réduites de droites

Propriété 12.4. *Soit $\mathscr{D}$ une droite du plan.*

1. *Si $\mathscr{D}$ est parallèle à l'axe des ordonnées, alors il existe un réel $\boldsymbol{c}$ tel que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ de même abscisse $\boldsymbol{c}$: $x=\boldsymbol{c}$ est une équation de $\mathscr{D}$.*
2. *Si $\mathscr{D}$ n'est parallèle pas à l'axe des ordonnées, alors il existe deux réels $\boldsymbol{a}$ et $\boldsymbol{b}$ tels que $\mathscr{D}$ soit l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ vérifiant l'équation*

   $$y=ax+b.$$

Démonstration. Exercice. □

Exemples :

- $y = 2x+5$ **et** $x = -2$ **sont des équations de droites.**
- $y = x^2$ **et** $y = x + \sqrt{x}$ **ne sont pas des équations de droites.**

Définition 12.2. *Soit $\mathscr{D}$ une droite d'équation $y = ax + b$.*

- *Le réel a est appelé* ***coefficient directeur****.*
- *Le réel b est appelé* ***ordonnée à l'origine****.*

Propriété 12.5. *Soient $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$ deux points d'un repère tels que $x_A \neq x_B$. Alors le coefficient directeur de la droite (AB) est*

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}.$$

Exemples **On a** $A\,(-4\,;-3)$ **et** $B\,(5\,;-1)$**, alors**

$$a = \frac{-1-(-4)}{5-(-3)} = \frac{3}{8}.$$

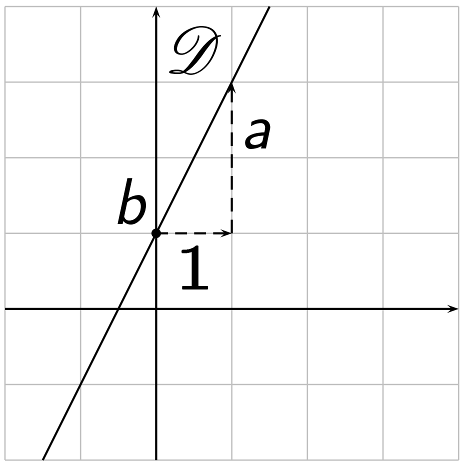
Démonstration. Soit a le coefficient directeur de la droite (AB) et b son ordonnée à l'origine ; (AB) a donc pour équation $y = ax + b$. Comme $A\,(x_A\,;y_A)$ et $B\,(x_B\,;y_B)$, on a

$$y_A = ax_A + b \quad \text{et} \quad y_B = ax_B + b.$$

On a alors

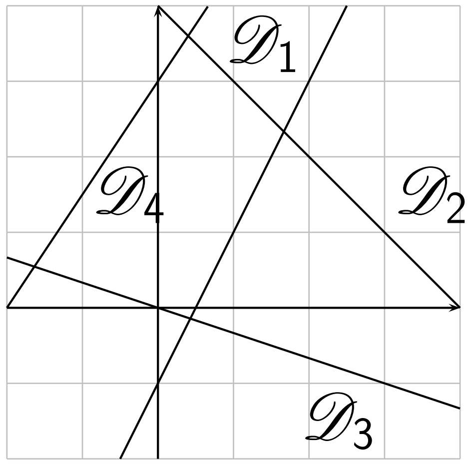
$$y_B - y_A = ax_B + b - (ax_A + b) = a(x_B - x_A).$$

Comme $x_A \neq x_B$, on a $x_B - x_A \neq 0$ et donc $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$. $\square$



- **La droite $\mathscr{D}$ passe par le point $(0\,;b)$.**
- **Si, en partant d'un point de $\mathscr{D}$, l'abscisse « avance » de 1, alors l'ordonnée varie (« monte » ou « descend ») de a : si $a > 0$, l'ordonnée augmente et si $a < 0$, elle diminue.**

Droite	a	b
$\mathscr{D}_1$	2	-1
$\mathscr{D}_2$	-1	4
$\mathscr{D}_3$	$\frac{1}{3}$	0
$\mathscr{D}_4$	$\frac{3}{2}$	3



4 Attendus et savoir-faire :

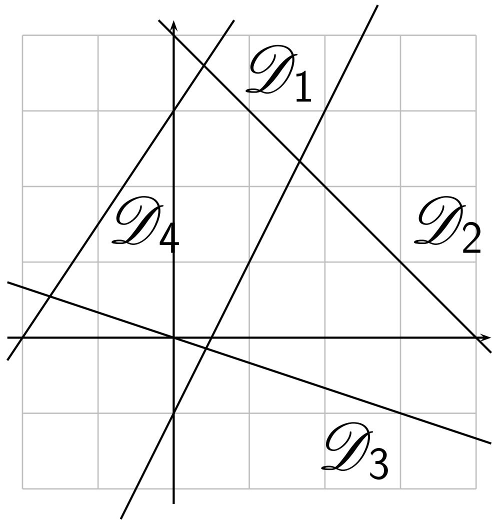
- Déterminer si une équation est celle d'une droite ou pas.
- Tracer une droite.
- Déterminer l'équation d'une droite à partir de sa représentation graphique, et donc son coefficient directeur et son ordonnée à l'origine.
- Déterminer l'équation d'une droite sachant qu'elle passe par deux points dont on connaît les coordonnées.
- Déterminer un vecteur directeur d'une droite à partir de son équation cartésienne.
- Déterminer si deux droites sont parallèles à partir de leurs équations cartésiennes.

— **Déterminer un vecteur directeur d'une droite sachant qu'elle est est parallèle à une seconde dont on connaît l'équation cartésienne.**
— **Déterminer une équation cartésienne d'une droite connaissant un vecteur directeur et un point lui appartenant.**

5 Exercices

5.1 Démarrage

Exercice 12.1. Donner pour chacune des droites suivantes deux vecteurs directeurs.



Exercice 12.2. Dans chaque cas, tracer la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$ et donner deux autres vecteurs directeurs de directions opposées.

1. $\vec{d}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $A(3\,;1)$.
2. $\vec{d}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A(-2\,;0)$.
3. $\vec{d}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(5\,;-1)$.
4. $\vec{d}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A(-1\,;1)$.

Exercice 12.3. Parmi les équations suivantes, quelles sont celles qui sont des équations de droites ? Justifier.

1. $3y = 2 - 4x$.
2. $-3(1+x) + y = 0$.
3. $(1+y)(1-x) = 0$.
4. $xy = 5$.
5. $\dfrac{1}{x} - y + 5 = 0$
6. $\dfrac{x+y}{3} - \dfrac{1}{4} = 0$.
7. $\sqrt{x+y-3} = 0$.

Exercice 12.4. Déterminer deux vecteurs directeurs des droites d'équations ci-dessous.

1. $3x + y - 1 = 0$.
2. $-2x + 7y + 3 = 0$.
3. $x - 4y = 0$.
4. $9y + 7 = 0$.

Exercice 12.5. Dans chaque cas, statuer – en justifiant – de l'appartenance du point A à la droite $\mathscr{D}$.

1. $\mathscr{D}\ :\ x + 4y - 20 = 0$ et $A\left(-4\,;9\right)$.
2. $\mathscr{D}\ :\ \dfrac{-2}{3}x + 2y - \dfrac{2}{3} = 0$ et $A\left(1\,;\dfrac{2}{3}\right)$.
3. $\mathscr{D}\ :\ 2x - 3y - 1 = 0$ et $A\left(12\,;5\right)$.
4. $\mathscr{D}\ :\ \dfrac{-4}{5}x - \dfrac{1}{2}y - 1 = 0$ et $A\left(\dfrac{1}{2}\,;3\right)$.

Exercice 12.6. Donner l'équation réduite des droites d'équations cartésiennes ci-dessous.

1. $-2x + 3y + 1 = 0$.
2. $7x + 5y - 2 = 0$.
3. $\dfrac{5}{2}x + \dfrac{1}{4}y = 0$.

Exercice 12.7. Déterminer les équations réduites de l'exercice **??**.

Exercice 12.8. Dans chaque cas, déterminer l'équation réduite de la droite passant par A et de coefficient directeur m puis tracer la droite dans un repère.

1. $A\left(5\,;-2\right)$ et $m=-3$.
2. $A\left(5\,;-1\right)$ et $m=\dfrac{1}{3}$.
3. $A\left(-\dfrac{1}{7}\,;\dfrac{3}{7}\right)$ et $m=-2$.

5.2 Appronfondissement

Exercice 12.9. Dans chaque cas, déterminer si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

1. $A\left(1\,;0\right)$ et $B\left(0\,;1\right)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.
2. $A\left(2\,;3\right)$ et $B\left(-3\,;4\right)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-1\end{pmatrix}$.
3. $A\left(-1\,;4\right)$ et $B\left(-2\,;6\right)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$.
4. $A\left(4\,;-2\right)$ et $B\left(1\,;1\right)$; $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

Exercice 12.10. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A\,(-5\,;y)$ et $3x-2y+1=0$.
2. $A\left(x\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $7x+y-1=0$.
3. $A\left(x\,;\dfrac{4}{3}\right)$ et $\dfrac{1}{3}x-\dfrac{1}{4}y+\dfrac{1}{4}=0$.

Exercice 12.11. Déterminer les équations cartésiennes des droites des exercices **??** et **??**.

Exercice 12.12. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A\,(1\,;0)$, $B\,(0\,;1)$ et $C\,(3\,;-2)$.
2. $A\,(1\,;-3)$, $B\,(2\,;1)$ et $C\,(1\,;1)$.

Exercice 12.13. [**] Soit $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation

$$(m+2)x+(2m+2)y+2=0,$$

où $m\in\mathbb{R}^*$.

1. Déterminer et construire les droites $\mathscr{D}_m$ pour $m=-1$, $m=0$ et $m=1$.
2. Déterminer les droites $\mathscr{D}_m$ qui sont parallèles aux axes des abscisses et des ordonnées.

3. Existe-t-il une droite $\mathscr{D}_m$ qui passe par le point $A\,(16\,;-2)$? – par $B\,(-6\,;3)$?

Exercice 12.14. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de (AB).

1. $A\,(1\,;2)$ et $B\,(3\,;4)$.
2. $A\left(-\sqrt{3}\,;-2\sqrt{2}\right)$ et $B\left(2\sqrt{2}\,;\sqrt{3}\right)$.
3. $A\left(\dfrac{2}{3}\,;-\dfrac{1}{2}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{3}\,;\dfrac{3}{2}\right)$.

Exercice 12.15. [**] Soit $\mathscr{D}_m$ la droite d'équation

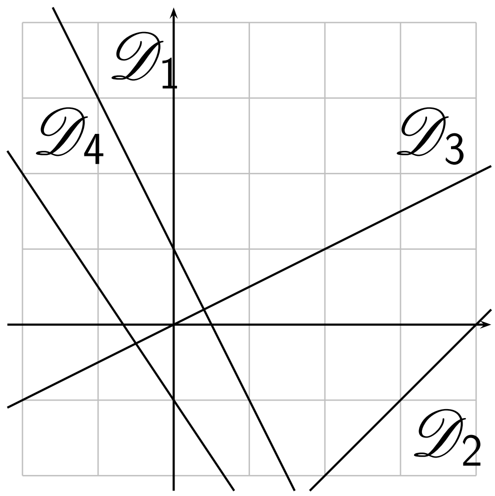
$$2x + my + 5 = 0,$$

où $m \in \mathbb{R}$. Est-il possible de trouver m tel que :

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ soit un vecteur directeur de $\mathscr{D}_m$?
2. $E\,(4\,;-1)$ appartienne à $\mathscr{D}_m$?
3. $\mathscr{D}_m$ soit parallèle à l'axe des ordonnées ?
4. la pente de $\mathscr{D}_m$ soit égale à 7 ?
5. $\mathscr{D}_m$ passe par l'origine ?

5.3 Entraînement

Exercice 12.16. Donner pour chacune des droites suivantes deux vecteurs directeurs.



Exercice 12.17. Dans chaque cas, tracer la droite $\mathscr{D}$ passant par le point A de vecteur directeur $\vec{d}$ et donner deux autres vecteurs directeurs de directions opposées.

1. $\vec{d}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A(3\,;1)$.
2. $\vec{d}\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $A(-2\,;0)$.
3. $\vec{d}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $A(7\,;1)$.
4. $\vec{d}\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $A(1\,;1)$.

Exercice 12.18. Déterminer deux vecteurs directeurs des droites d'équations ci-dessous.

1. $-x-y-1=0$.
2. $-4x+6y+3=0$.
3. $x-y=0$.
4. $9x+7=0$.

Exercice 12.19. Dans chaque cas, calculer la coordonnée manquante du point A pour qu'il appartienne à la droite d'équation donnée.

1. $A\,(x\,;-5)$ et $3x-2y+1=0$.
2. $A\left(\frac{1}{2}\,;y\right)$ et $7x+y-1=0$.
3. $A\left(\frac{4}{3}\,;y\right)$ et $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{4}=0$.

Exercice 12.20. Déterminer les équations cartésiennes des droites des exercices **??** et **??**.

Exercice 12.21. Dans chaque cas, déterminer une équation cartésienne de la droite $\mathscr{D}$ parallèle à (AB) et passant par C.

1. $A\,(-2\,;-2)$, $B\,(1\,;6)$ et $C\,(-5\,;-2)$.
2. $A\,(-5\,;-3)$, $B\,(-2\,;1)$ et $C\,(-7\,;0)$.

Exercice 12.22. Déterminer les équations réduites de l'exercice **??**.

Exercice 12.23. Dans chaque cas, déterminer l'équation réduite de la droite passant par A et de coefficient directeur m puis tracer la droite dans un repère.

1. $A\,(-2\,;2)$ et $m=-5$.
2. $A\,(5\,;1)$ et $m=\dfrac{3}{4}$.
3. $A\left(-\dfrac{1}{6}\,;\dfrac{5}{6}\right)$ et $m=-3$.

Exercice 12.24. Dans chacun des cas suivants, déterminer l'équation réduite de (AB).

1. $A\,(5\,;4)$ et $B\,(0\,;-2)$.
2. $A\left(-\sqrt{5}\,;-2\sqrt{7}\right)$ et $B\left(2\sqrt{7}\,;\sqrt{5}\right)$.
3. $A\left(\dfrac{2}{5}\,;-\dfrac{1}{5}\right)$ et $B\left(-\dfrac{1}{5}\,;\dfrac{3}{2}\right)$.