Intersections de droites

1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

1.1 Définition

Définition 15.1.

- *On appelle* ***système de deux équations linéaires à deux inconnues*** *tout ensemble d'équations de la forme*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

où a_1, a_2, b_1, $b_2 \in \mathbb{R}$.
- *Le couple* $(x\,;y)$ *est* ***solution du système*** *si et seulement si il est solution de chacune des équations qui le composent.*
- ***Résoudre*** *un système signifie trouver ses solutions.*

Remarque : Les équations d'un tel système sont en fait des équations de droites.

Exemples :

1.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

2.

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 1, \\ 2x + y = 2, \end{cases}$$

n'est pas un système de deux équations linéaires car il contient un x^2.

Exemples :

— Le couple $(1\,;1)$ est solution du système ci-dessus car

$$\begin{cases} 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1, \\ 1 + 1 = 2. \end{cases}$$

— **Le couple $(2\,;-1)$ n'est pas solution du système même s'il vérifie l'une de ses deux équations car il ne vérifie pas l'autre :**

$$\begin{cases} 3\times 2-2\times(-1)=8\neq 1, \\ 2+(-1)=1. \end{cases}$$

1.2 Résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Propriété 15.1. *Un système de deux équations linéaires à deux inconnues admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.*

Exemple de résolution d'un système linéaire : Reprenons le système ci-dessus et donnons un nom à ses lignes :

$$\begin{cases} 3x-2y=1, \quad (L_1) \\ x+y=2. \quad (L_2) \end{cases}$$

Pour trouver ses éventuelles solutions, on laisse une ligne intacte – par exemple (L_1) – et remplace l'autre par une combinaison linéaire des deux lignes afin d'éliminer une inconnue – dans ce cas, on va éliminer x en remplaçant (L_2) par $(L_1 - 3L_2)$:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, & (L_1) \\ 3x - 2y - 3(x+y) = 1 - 3 \times 2. & (L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2) \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, & (L_1) \\ -5y = -5. & (L_2) \end{cases}$$

La ligne (L_2) est maintenant une équation à une inconnue, sa solution est $y = 1$. On remplace alors y par 1 dans (L_1) :

$$\begin{cases} 3x - 2 = 1, & (L_1) \\ y = 1. & (L_2) \end{cases}$$

La ligne (L_1) est à son tour devenu une inconnue, sa solution est -1 . Le couple solution est donc $(1\,;1)$.

Remarques :

- Cette méthode est dite « d'élimination » car elle consiste à éliminer une variable pour se ramener à des équations à une inconnue.
- Un système a une infinité de solutions lorsque l'élimination conduit à une équation du type « $0 = 0$ ».
- Un système n'a pas de solution lorsque l'élimination conduit à une équation du type « $0 = 1$ ».

2 Parallélisme

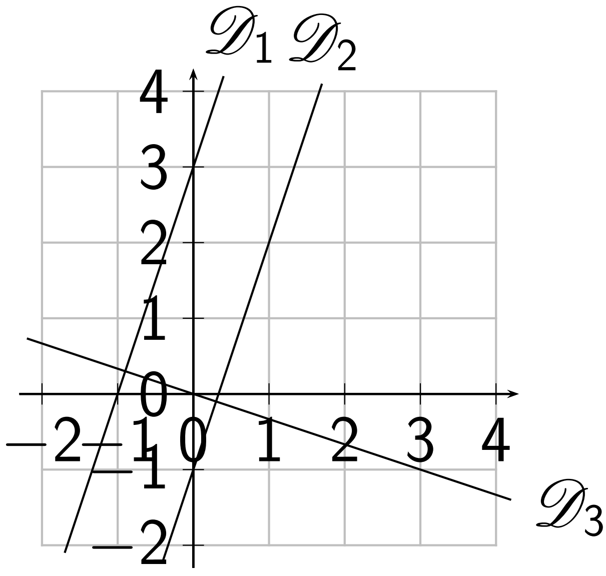
Propriété 15.2. *Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.*

Démonstration. Il existe A et B deux points de $\mathscr{D}_1$ tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. De même, il existe C et D deux points de $\mathscr{D}_2$ tels que $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. $\square$

Propriété 15.3. *Soient deux droites du plan $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $y = a_1x + b_1$ et $y = a_2x + b_2$. Les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $a_1 = a_2$.*

Exemples :

- **$\mathscr{D}_1$ d'équation $y = 3x + 3$ et $\mathscr{D}_2$ d'équation $y = 3x - 1$ sont parallèles.**
- **$\mathscr{D}_1$ d'équation $y = 3x + 3$ et $\mathscr{D}_3$ d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ ne sont pas parallèles.**



Démonstration. Soient $A\,(0\,;y_A)$ et $B\,(1\,;y_B)$ deux points de $\mathscr{D}_1$. Par définition, $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_1$. Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\a_1\end{pmatrix}$ où a_1 est le coefficient directeur de $\mathscr{D}_1$. De même, en considérant $C\,(0\,;y_C)$ et $D\,(1\,;y_D)$

deux points de $\mathscr{D}_2$, $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ (où a_2 est le coefficient directeur de $\mathscr{D}_2$) est un vecteur directeur de $\mathscr{D}_2$.

D'après la propriété 15.2, $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires si et seulement si

$$1 \times a_2 - a_1 \times 1 = 0,$$

ou encore $a_1 = a_2$. □

Corollaire 15.1. *Soient A, B et C trois points du plan. Ces trois points sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.*

3 Intersection

Propriété 15.4. *Soit $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires .*

Démonstration. Conséquence immédiate de la propriété 15.3. □

Propriété 15.5. *Soient deux droites du plan $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Si les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes, alors leur point d'intersection I est l'unique solution du système*

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1, \\ a_2x + b_2y = -c_2. \end{cases}$$

Démonstration. Soient deux droites du plan $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Si elles sont sécantes, alors elles admettent un unique point d'intersection I qui est solution des deux équations de droites et donc du système ci-dessus. □

Exemple : Soient les droites du plan $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ d'équations respectives $3x-2y-1=0$ et $x+y-2=$. Leurs vecteurs directeurs sont $\vec{v}_1\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a

$$2\times(-1) - 3\times 2 = -8 \neq 0,$$

donc $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires. On en déduit que $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont sécantes et leur point d'intersection est l'unique solution

du système

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

On a déjà vu que la solution de ce système est $(1\,;1)$ donc le point d'intersection de $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ est $I\,(1\,;1)$.

4 Attendus et savoir-faire :

- Déterminer si un système est un système d'équations linéaires à deux inconnues ou non.
- Déterminer si un couple est solution ou non d'un système d'équations.
- Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues.
- Déterminer si des droites sont parallèles ou sécantes.
- Sachant que deux droites parallèles et connaissant un vecteur directeur ou le coefficient directeur de l'une, déterminer celui de l'autre.
- Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

5 Exercices

5.1 Démarrage

Exercice 15.1. Dans chaque cas, dire si oui ou non le couple $(-2\,;1)$ est solution du système ci-dessous.

1. $\begin{cases} 2x+3y=1, \\ x+2y=0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ -2x+4y=8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x+y=-5, \\ -5x+7y=4. \end{cases}$

Exercice 15.2. Résoudre les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} 2x+y=1, \\ x+2y=0. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-2y=1, \\ -2x+4y=8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x+y=-5, \\ -5x+7y=4. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 3x-y=1, \\ x+2y=-6. \end{cases}$
5. $\begin{cases} -2x+5y=0, \\ 2x-5y=3. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x-6y=8, \\ -x+3y=-4. \end{cases}$

Exercice 15.3. Dans chaque cas, déterminer si les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles ou sécantes.

1. $\mathscr{D}_1 : \ 6x-y+3=0$ et $\mathscr{D}_2 : \ -4x+\dfrac{2}{3}y+5=0$.
2. $\mathscr{D}_1 : \ 3x+2y-1=0$ et $\mathscr{D}_2 : \ x+\dfrac{1}{3}y+4=0$.
3. $\mathscr{D}_1 : \ 4x-3y+12=0$ et $\mathscr{D}_2 : \ y=7$.
4. $\mathscr{D}_1 : \ y=2x-1$ et $\mathscr{D}_2 : \ y=3x+4$.
5. $\mathscr{D}_1 : \ y=3x-4$ et $\mathscr{D}_2 : \ y=4x+5$.
6. $\mathscr{D}_1 : \ y=-6x-7$ et $\mathscr{D}_2 : \ y=1$.

5.2 Approfondissement

Exercice 15.4. On considère le système

$$(S) \quad \begin{cases} x^2+y^2=13, \\ 2x^2-y^2=-1. \end{cases}$$

1. On pose $X=x^2$ et $Y=y^2$. Écrire le système dont $(X\,;Y)$ est solution et le résoudre.
2. En déduire tous les couples $(x\,;y)$ solutions de (S).

Exercice 15.5. On considère le système

$$(S)\ \begin{cases} \dfrac{3}{x}+\dfrac{2}{y}=4, \\ \dfrac{9}{x}-\dfrac{5}{y}=1. \end{cases}$$

1. On pose $X=\dfrac{1}{x}$ et $Y=\dfrac{1}{y}$. Écrire le système dont $(X\,;Y)$ est solution et le résoudre.
2. En déduire tous les couples $(x\,;y)$ solutions de (S).

Exercice 15.6. Résoudre graphiquement les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} y=2, \\ x-y=3. \end{cases}$
2. $\begin{cases} -2x+2y=-6, \\ x+2y=6. \end{cases}$

Exercice 15.7. Soit $m\in\mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les systèmes suivants ont des solutions

1. $\begin{cases} mx+3y=5, \\ 2x+my=7. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 5x-my=6, \\ mx+25y=10. \end{cases}$
3. $\begin{cases} mx+y=6, \\ mx-2y=-1. \end{cases}$

Exercice 15.8. [Magie] Triss et Yennefer ont acheté des items magiques afin de préparer quelques élixirs. Triss a acheté 80 cristaux d'Albar et 50 plumes de Cocatrix pour 75 Orins ; Yennefer a acheté 30 cristaux d'Albar et 60 plumes de Cocatrix pour 57 Orins. Déterminer le coût d'un cristal d'Albar et d'une plume de Cocatrix.

Exercice 15.9. [Algorithme] On souhaite écrire un algorithme permettant de déterminer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, des droites d'équations $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$.

1. À quelles conditions les deux droites sont-elles sécantes, parallèles, confondues ?
2. Exprimer x en fonction m_1, m_2, p_1 et p_2.
3. Compléter l'algorithme ci-dessous.

Exercice 15.10. [Algorithme,*]** Écrire un algorithme permettant de déterminer si les droites d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2 + c_2 = 0$ sont parallèles, confondues ou sécantes et le cas échéant leur unique point d'intersection.

Algorithme 1 : Intersection de droites

Données : m_1, m_2, p_1, p_2

Début

  Si .... **Alors**

    Sorties : ....

  FinSi

  Sinon Si .... **Alors**

    Sorties : ....

  FinSi

  Sinon Si .... **Alors**

    $x \leftarrow$ ....

    $y \leftarrow$ ....

    Sorties : ....

  FinSi

Fin

Exercice 15.11. [**] On souhaite déterminer les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle ABC rectangle en B dont l'hypoténuse mesure 4 et l'aire vaut $3,84$. On pose $AB = x$ et $BC = y$.

1. Faire un dessin de la situation.
2. Exprimer l'aire de ABC en fonction de x et y. En déduire que $xy = 7,68$.
3. Écrire l'égalité de Pythagore dans ce triangle à l'aide de x et y.

4. Montrer que $(x+y)^2 = 31,36$ et $(x-y)^2 = 0,64$.
5. En déduire un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y et le résoudre.

Exercice 15.12. [*] Soit $m \in \mathbb{R}$. On nomme d_m la droite d'équation $mx + (1-2m) + m - 3 = 0$.

1. Écrire une équation de d_1 et la tracer.
2. Tracer dans le même repère d_{-1} et d_2.
3. Déterminer la valeur de m pour laquelle :
   a) la droite d_m est parallèle à l'axe (Ox) puis la tracer ;
   b) la droite d_m est parallèle à l'axe (Oy) puis la tracer ;
   c) la droite d_m passe par l'origine du repère puis la tracer.
4. Les droites tracées semblent concourantes en un point P. Montrer que quelque soit m, d_m passe par P.
5. Existe-t-il des droites d_m :
   a) passant par $M\,(10\,;6)$?
   b) de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\-1\end{pmatrix}$?

5.3 Entraînement

Exercice 15.13. Dans chaque cas, dire si oui ou non le couple $(-1\,;2)$ est solution du système ci-dessous.

1. $\begin{cases} 3x - y = -5, \\ -5x + 7y = 4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} x + y = 1, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$
3. $\begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$

Exercice 15.14. Résoudre les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} x + y = 1, \\ 5x + 2y = 4. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x - 2y = 10, \\ -2x + y = -5. \end{cases}$
3. $\begin{cases} -3x + 5y = -5, \\ 21x - 35y = 4. \end{cases}$
4. $\begin{cases} 10x - 12y = 9, \\ x + 2y = -8. \end{cases}$
5. $\begin{cases} -2x + 5y = 7, \\ 16x - 40y = -56. \end{cases}$
6. $\begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ -x + 3y = -4. \end{cases}$

Exercice 15.15. Dans chaque cas, déterminer si les droites $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}_2$ sont parallèles ou sécantes.

1. $\mathscr{D}_1 :\ 5x+2y+3=0$ et $\mathscr{D}_2 :\ -4x+\frac{2}{5}y+3=0$.
2. $\mathscr{D}_1 :\ 2x-3y+1=0$ et $\mathscr{D}_2 :\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}y+4=0$.
3. $\mathscr{D}_1 :\ x+2y-4=0$ et $\mathscr{D}_2 :\ 2x+y-1=0$.
4. $\mathscr{D}_1 :\ y=2x-1$ et $\mathscr{D}_2 :\ y=2x+6$.
5. $\mathscr{D}_1 :\ y=-3x-4$ et $\mathscr{D}_2 :\ y=4x-7$.
6. $\mathscr{D}_1 :\ y=8x-6$ et $\mathscr{D}_2 :\ x=3$.

Exercice 15.16. Résoudre graphiquement les systèmes ci-dessous.

1. $\begin{cases} x=-4, \\ -x+y=5. \end{cases}$
2. $\begin{cases} 3x-3y=-9, \\ x+2y=6. \end{cases}$

Exercice 15.17. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les systèmes suivants ont des solutions

1. $\begin{cases} 9x-my=7, \\ -mx+4y=5. \end{cases}$
2. $\begin{cases} mx-y=2, \\ 36x+my=6. \end{cases}$
3. $\begin{cases} x+my=-1, \\ 5x-2my=0. \end{cases}$