

Chapitre 15

Intersections de droites

15.1 Systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

15.1.1 Définition

Définition 15.1.

— On appelle **système de deux équations linéaires à deux inconnues** tout ensemble d'équations de la forme

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2, \end{cases}$$

où $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

— Le couple $(x; y)$ est **solution du système** si et seulement si il est solution de chacune des équations qui le composent.

— **Résoudre** un système signifie trouver ses solutions.

Remarque : Les équations d'un tel système sont en fait des équations de droites.

Exemples :

1.

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + y = 2, \end{cases}$$

est un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

2.

$$\begin{cases} 3x^2 - 2y = 1, \\ 2x + y = 2, \end{cases}$$

n'est pas un système de deux équations linéaires car il contient un x^2 .

Exemples :

— Le couple $(1; 1)$ est solution du système ci-dessus car

$$\begin{cases} 3 \times 1 - 2 \times 1 = 1, \\ 1 + 1 = 2. \end{cases}$$

— Le couple $(2; -1)$ n'est pas solution du système même s'il vérifie l'une de ses deux équations car il ne vérifie pas l'autre :

$$\begin{cases} 3 \times 2 - 2 \times (-1) = 8 \neq 1, \\ 2 + (-1) = 1. \end{cases}$$

15.1.2 Résolution de systèmes de deux équations linéaires à deux inconnues

Propriété 15.1. *Un système de deux équations linéaires à deux inconnues admet soit une unique solution, soit une infinité de solutions, soit aucune solution.*

Exemple de résolution d'un système linéaire : Reprenons le système ci-dessus et donnons un nom à ses lignes :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, & (L_1) \\ x + y = 2. & (L_2) \end{cases}$$

Pour trouver ses éventuelles solutions, on laisse une ligne intacte – par exemple (L_1) – et remplace l'autre par une combinaison linéaire des deux lignes afin d'éliminer une inconnue – dans ce cas, on va éliminer x en remplaçant (L_2) par $(L_1 - 3L_2)$:

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, & (L_1) \\ 3x - 2y - 3(x + y) = 1 - 3 \times 2. & (L_2 \leftarrow L_1 - 3L_2) \end{cases}$$

On obtient alors :

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, & (L_1) \\ -5y = -5. & (L_2) \end{cases}$$

La ligne (L_2) est maintenant une équation à une inconnue, sa solution est $y = 1$. On remplace alors y par 1 dans (L_1) :

$$\begin{cases} 3x - 2 = 1, & (L_1) \\ y = 1. & (L_2) \end{cases}$$

La ligne (L_1) est à son tour devenu une inconnue, sa solution est -1 . Le couple solution est donc $(1; 1)$.

Remarques :

- Cette méthode est dite « d'élimination » car elle consiste à éliminer une variable pour se ramener à des équations à une inconnue.
- Un système a une infinité de solutions lorsque l'élimination conduit à une équation du type « $0 = 0$ ».
- Un système n'a pas de solution lorsque l'élimination conduit à une équation du type « $0 = 1$ ».

15.2 Parallélisme

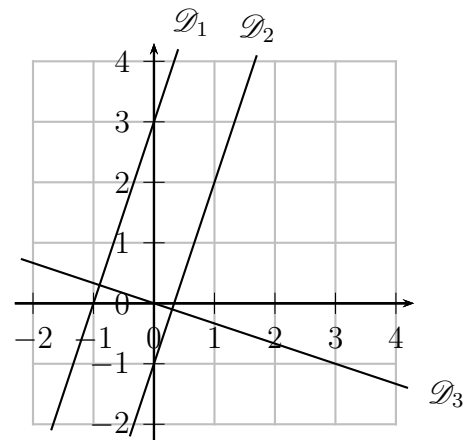
Propriété 15.2. Soit \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} . \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles si et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Démonstration. Il existe A et B deux points de \mathcal{D}_1 tels que $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$. De même, il existe C et D deux points de \mathcal{D}_2 tels que $\overrightarrow{CD} = \vec{v}$. Les droites (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$ sont colinéaires. \square

Propriété 15.3. Soient deux droites du plan \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'équations respectives $y = a_1x + b_1$ et $y = a_2x + b_2$. Les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles si et seulement si $a_1 = a_2$.

Exemples :

- \mathcal{D}_1 d'équation $y = 3x + 3$ et \mathcal{D}_2 d'équation $y = 3x - 1$ sont parallèles.
- \mathcal{D}_1 d'équation $y = 3x + 3$ et \mathcal{D}_3 d'équation $y = -\frac{1}{3}x$ ne sont pas parallèles.



Démonstration. Soient $A(0; y_A)$ et $B(1; y_B)$ deux points de \mathcal{D}_1 . Par définition, \overrightarrow{AB} est un vecteur directeur de \mathcal{D}_1 . Or, $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ a_1 \end{pmatrix}$ où a_1 est le coefficient directeur de \mathcal{D}_1 . De même, en considérant $C(0; y_C)$ et $D(1; y_D)$ deux points de \mathcal{D}_2 , $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ (où a_2 est le coefficient directeur de \mathcal{D}_2) est un vecteur directeur de \mathcal{D}_2 .

D'après la propriété 15.2, \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles si et seulement si \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont colinéaires si et seulement si

$$1 \times a_2 - a_1 \times 1 = 0,$$

ou encore $a_1 = a_2$. \square

Corollaire 15.1. Soient A , B et C trois points du plan. Ces trois points sont alignés si et seulement si les droites (AB) et (AC) ont le même coefficient directeur.

15.3 Intersection

Propriété 15.4. Soit \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 deux droites du plan de vecteurs directeurs respectifs \vec{u} et \vec{v} . \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont sécantes si et seulement si \vec{u} et \vec{v} ne sont pas colinéaires.

Démonstration. Conséquence immédiate de la propriété 15.3. \square

Propriété 15.5. Soient deux droites du plan \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Si les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont sécantes, alors leur point d'intersection I est l'unique solution du système

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = -c_1, \\ a_2x + b_2y = -c_2. \end{cases}$$

Démonstration. Soient deux droites du plan \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'équations respectives $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$. Si elles sont sécantes, alors elles admettent un unique point d'intersection I qui est solution des deux équations de droites et donc du système ci-dessus. \square

Exemple : Soient les droites du plan \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 d'équations respectives $3x - 2y - 1 = 0$ et $x + y - 2 = 0$. Leurs vecteurs directeurs sont $\vec{v}_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a

$$2 \times (-1) - 3 \times 2 = -8 \neq 0,$$

donc \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires. On en déduit que \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont sécantes et leur point d'intersection est l'unique solution du système

$$\begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ x + y = 2. \end{cases}$$

On a déjà vu que la solution de ce système est $(1; 1)$ donc le point d'intersection de \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 est $I(1; 1)$.

15.4 Attendus et savoir-faire :

- Déterminer si un système est un système d'équations linéaires à deux inconnues ou non.
- Déterminer si un couple est solution ou non d'un système d'équations.
- Résoudre un système d'équations linéaires à deux inconnues.
- Déterminer si des droites sont parallèles ou sécantes.
- Sachant que deux droites parallèles et connaissant un vecteur directeur ou le coefficient directeur de l'une, déterminer celui de l'autre.
- Déterminer le point d'intersection de deux droites sécantes.

15.5 Exercices

15.5.1 Démarrage

Exercice 15.1. Dans chaque cas, dire si oui ou non le couple $(-2; 1)$ est solution du système ci-dessous.

$$1. \begin{cases} 2x + 3y = 1, \\ x + 2y = 0. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 3x + y = -5, \\ -5x + 7y = 4. \end{cases}$$

Exercice 15.2. Résoudre les systèmes ci-dessous.

$$1. \begin{cases} 2x + y = 1, \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} 3x + y = -5, \\ -5x + 7y = 4. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} -2x + 5y = 0, \\ 2x - 5y = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3x - 2y = 1, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 3x - y = 1, \\ x + 2y = -6. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} 2x - 6y = 8, \\ -x + 3y = -4. \end{cases}$$

Exercice 15.3. Dans chaque cas, déterminer si les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles ou sécantes.

$$1. \mathcal{D}_1 : 6x - y + 3 = 0 \text{ et } \mathcal{D}_2 : -4x + \frac{2}{3}y + 5 = 0.$$

$$2. \mathcal{D}_1 : 3x + 2y - 1 = 0 \text{ et } \mathcal{D}_2 : x + \frac{1}{3}y + 4 = 0.$$

$$3. \mathcal{D}_1 : 4x - 3y + 12 = 0 \text{ et } \mathcal{D}_2 : y = 7.$$

$$4. \mathcal{D}_1 : y = 2x - 1 \text{ et } \mathcal{D}_2 : y = 3x + 4.$$

$$5. \mathcal{D}_1 : y = 3x - 4 \text{ et } \mathcal{D}_2 : y = 4x + 5.$$

$$6. \mathcal{D}_1 : y = -6x - 7 \text{ et } \mathcal{D}_2 : y = 1.$$

15.5.2 Approfondissement

Exercice 15.4. On considère le système $(S) \begin{cases} x^2 + y^2 = 13, \\ 2x^2 - y^2 = -1. \end{cases}$

1. On pose $X = x^2$ et $Y = y^2$. Écrire le système dont $(X; Y)$ est solution et le résoudre.
2. En déduire tous les couples $(x; y)$ solutions de (S) .

Exercice 15.5. On considère le système $(S) \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{2}{y} = 4, \\ \frac{x}{9} - \frac{y}{5} = 1. \end{cases}$

1. On pose $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$. Écrire le système dont $(X; Y)$ est solution et le résoudre.
2. En déduire tous les couples $(x; y)$ solutions de (S) .

Exercice 15.6. Résoudre graphiquement les systèmes ci-dessous.

$$1. \begin{cases} y = 2, \\ x - y = 3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} -2x + 2y = -6, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$$

Exercice 15.7. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les systèmes suivants ont des solutions

$$1. \begin{cases} mx + 3y = 5, \\ 2x + my = 7. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 5x - my = 6, \\ mx + 25y = 10. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} mx + y = 6, \\ mx - 2y = -1. \end{cases}$$

Exercice 15.8. [Magie] Triss et Yennefer ont acheté des items magiques afin de préparer quelques élixirs. Triss a acheté 80 cristaux d'Albar et 50 plumes de Cocatrix pour 75 Orins; Yennefer a acheté 30 cristaux d'Albar et 60 plumes de Cocatrix pour 57 Orins. Déterminer le coût d'un cristal d'Albar et d'une plume de Cocatrix.

Exercice 15.9. [Algorithmme] On souhaite écrire un algorithme permettant de déterminer les coordonnées du point d'intersection, s'il existe, des droites d'équations $y = m_1x + p_1$ et $y = m_2x + p_2$.

1. À quelles conditions les deux droites sont-elles sécantes, parallèles, confondues ?
2. Exprimer x en fonction m_1, m_2, p_1 et p_2 .
3. Compléter l'algorithme ci-dessous.

Algorithme 1 : Intersection de droites

Données : m_1, m_2, p_1, p_2

```

1 Début
2   Si ..... Alors
3   |   Sorties : .....
4   Sinon Si ..... Alors
5   |   Sorties : .....
6   |   Sorties : .....
7   |   Sorties : .....
7 Fin
    
```

Exercice 15.10. [Algorithmme,*]** Écrire un algorithme permettant de déterminer si les droites d'équations $a_1x + b_1y + c_1 = 0$ et $a_2x + b_2y + c_2 = 0$ sont parallèles, confondues ou sécantes et le cas échéant leur unique point d'intersection.

Exercice 15.11. []** On souhaite déterminer les longueurs des côtés de l'angle droit d'un triangle ABC rectangle en B dont l'hypoténuse mesure 4 et l'aire vaut 3,84. On pose $AB = x$ et $BC = y$.

1. Faire un dessin de la situation.
2. Exprimer l'aire de ABC en fonction de x et y . En déduire que $xy = 7,68$.
3. Écrire l'égalité de Pythagore dans ce triangle à l'aide de x et y .
4. Montrer que $(x + y)^2 = 31,36$ et $(x - y)^2 = 0,64$.
5. En déduire un système linéaire de deux équations à deux inconnues x et y et le résoudre.

Exercice 15.12. [*] Soit $m \in \mathbb{R}$. On nomme d_m la droite d'équation $mx + (1 - 2m)y + m - 3 = 0$.

1. Écrire une équation de d_1 et la tracer.
2. Tracer dans le même repère d_{-1} et d_2 .
3. Déterminer la valeur de m pour laquelle :
 - (a) la droite d_m est parallèle à l'axe (Ox) puis la tracer ;
 - (b) la droite d_m est parallèle à l'axe (Oy) puis la tracer ;
 - (c) la droite d_m passe par l'origine du repère puis la tracer.
4. Les droites tracées semblent concourantes en un point P . Montrer que quelque soit m , d_m passe par P .
5. Existe-t-il des droites d_m :
 - (a) passant par $M(10;6)$?
 - (b) de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$?

15.5.3 Entraînement

Exercice 15.13. Dans chaque cas, dire si oui ou non le couple $(-1; 2)$ est solution du système ci-dessous.

$$1. \begin{cases} 3x - y = -5, \\ -5x + 7y = 4. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} x + y = 1, \\ -2x + 4y = 8. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} 3x + 2y = 1, \\ 2x + y = 0. \end{cases}$$

Exercice 15.14. Résoudre les systèmes ci-dessous.

$$1. \begin{cases} x + y = 1, \\ 5x + 2y = 4. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} -3x + 5y = -5, \\ 21x - 35y = 4. \end{cases} \quad 5. \begin{cases} -2x + 5y = 7, \\ 16x - 40y = -56. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 4x - 2y = 10, \\ -2x + y = -5. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 10x - 12y = 9, \\ x + 2y = -8. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 2x - 3y = 0, \\ -x + 3y = -4. \end{cases}$$

Exercice 15.15. Dans chaque cas, déterminer si les droites \mathcal{D}_1 et \mathcal{D}_2 sont parallèles ou sécantes.

1. $\mathcal{D}_1 : 5x + 2y + 3 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : -4x + \frac{2}{5}y + 3 = 0$.
2. $\mathcal{D}_1 : 2x - 3y + 1 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : -\frac{1}{2}x + \frac{3}{4}y + 4 = 0$.
3. $\mathcal{D}_1 : x + 2y - 4 = 0$ et $\mathcal{D}_2 : 2x + y - 1 = 0$.
4. $\mathcal{D}_1 : y = 2x - 1$ et $\mathcal{D}_2 : y = 2x + 6$.
5. $\mathcal{D}_1 : y = -3x - 4$ et $\mathcal{D}_2 : y = 4x - 7$.
6. $\mathcal{D}_1 : y = 8x - 6$ et $\mathcal{D}_2 : x = 3$.

Exercice 15.16. Résoudre graphiquement les systèmes ci-dessous.

$$1. \begin{cases} x = -4, \\ -x + y = 5. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 3x - 3y = -9, \\ x + 2y = 6. \end{cases}$$

Exercice 15.17. Soit $m \in \mathbb{R}$. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles les systèmes suivants ont des solutions

$$1. \begin{cases} 9x - my = 7, \\ -mx + 4y = 5. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} mx - y = 2, \\ 36x + my = 6. \end{cases} \quad 3. \begin{cases} x + my = -1, \\ 5x - 2my = 0. \end{cases}$$