

Chapitre 5

Évolutions

5.1 Proportion

5.1.1 Proportion et pourcentage

Définition 5.1. Soient E un ensemble non vide et n_E le nombre d'éléments de E . Soient A un sous-ensemble de E et n_A le nombre d'éléments de A . La **proportion** de A dans E est le réel défini par $p = \frac{n_A}{n_E}$.

Propriété 5.1. Une proportion p est un nombre toujours compris entre 0 et 1 : $0 \leq p \leq 1$.

Démonstration. Exercice. □

Exemple : Lors d'un exercice de tir, 5 Stormtroopers parmi les 30 de l'escouade réussissent à atteindre leur cible. La proportion de Stormtroopers ayant réussi l'exercice est donc

$$p = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \simeq 0,167 = 16,7\%.$$

Fraction	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$
Décimal	0	1	0,5	0,25	0,75	0,33...	0,66...
Pourcentage	0%	100%	50%	25%	75%	33,33...%	66,66..%
Français	rien	tout	la moitié	le quart	les trois quart	le tiers	les deux tiers

5.1.2 Pourcentage de pourcentage

Propriété 5.2. Soient E un ensemble non vide, F une partie non vide de E et A une partie de F . Si p_1 est la proportion de F dans E et si p_2 est la proportion de A dans F , alors la proportion p de A dans E est $p = p_1 \times p_2$.

Démonstration. Soient E un ensemble non vide, F une partie non vide de E et A une partie de F . On note respectivement n_E , n_F et n_A les nombres d'éléments de E , F et A . Comme E et F sont non vides, on a $n_E \neq 0$ et $n_F \neq 0$. On note p_1 la proportion de F dans E , p_2 la proportion de A dans F et la proportion p de A dans E . On a alors

$$p_1 \times p_2 = \frac{n_F}{n_E} \times \frac{n_A}{n_F} = \frac{n_A}{n_E} = p.$$

□

Exemple : On estime à 0,1% la proportion de personnes croyant que la Terre est plate au sein d'un pays ; parmi elles, 88% croient que le gouvernement est en fait composé de reptiliens complotant afin de dominer le monde (proportions inventées). En notant p la proportion de platiste (personne croyant que la Terre est plate) croyant dans un complot reptilien, on a

$$p = \frac{0,1}{100} \times \frac{90}{100} = 0,0009 = 0,09\%.$$

La proportion de platiste croyant au complot reptilien est donc de 0,09%.

5.2 Évolutions

5.2.1 Taux d'évolution

Définition 5.2. Soit v_1 une valeur (ou grandeur) évoluant jusqu'à une valeur v_2 . On appelle **taux d'évolution** – par rapport à v_1 – le rapport

$$t = \frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} - 1.$$

Exemple : Le prix d'un kilogramme d'argent passe de 50\$ à 200\$. On a $v_1 = 50$ et $v_2 = 200$, le taux d'évolution est

$$t = \frac{200 - 50}{50} = \frac{150}{50} = 3 = 300\%.$$

Le prix du kilo d'argent a augmenté de 300%.

★ Vidéo.

5.2.2 Coefficient multiplicateur

Définition 5.3. Soit v_1 une valeur (ou grandeur) évoluant jusqu'à une valeur v_2 . On appelle **coefficient multiplicateur** le rapport

$$k = \frac{v_2}{v_1}.$$

Exemple : Dans une réalité alternative, la France fait baisser ses émissions de GAS de 500Mt à 120Mt entre 2015 et 2020. On a $v_1 = 500$ et $v_2 = 120$, le coefficient multiplicateur est donc

$$k = \frac{120}{500} = 0,24.$$

★ Vidéo.

Propriété 5.3. Avec les notations précédentes, on a un lien entre coefficient multiplicateur et taux d'évolution :

$$k = 1 + t \quad \text{ou encore} \quad t = k - 1.$$

Démonstration. Soit v_1 une valeur évoluant jusqu'à une valeur v_2 . On a

$$t = \frac{v_2 - v_1}{v_1} = \frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_1} = k - 1.$$

□

Exemples : En reprenant l'exemple précédent, on trouve le taux d'évolution $t = 0,24 - 1 = -0,76 = -76\%$.

Exemples :

Taux d'évolution	Coefficient multiplicateur
+25%	1,25
-3%	0,97
-200%	-1
+150%	2,5
-90%	0,1

5.3 Évolutions successives

5.3.1 Évolutions successives

Propriété 5.4. Soit v_1 une valeur évoluant jusqu'à une valeur v_2 ; on note le coefficient multiplicateur k_1 . Puis v_2 évolue jusqu'à une valeur v_3 ; on note le coefficient multiplicateur k_2 . Le coefficient multiplicateur correspondant à l'évolution de v_1 à v_3 est

$$k = k_1 \times k_2.$$

Exemple : À quelle évolution globale correspond une baisse de 25% puis une augmentation de 40% ?

On a $k_1 = 0,75$ et $k_2 = 1,4$ donc $k = k_1 \times k_2 = 0,75 \times 1,4 = 1,05$. On a donc une hausse de 5%.

Remarque : attention ! Les pourcentages ne s'additionnent pas !

★ Vidéo.

5.3.2 Taux d'évolution moyen

Définition 5.4. Soient $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. On définit la **racine n -ième** de a comme le réel positif x tel que $x^n = a$. On note $x = a^{\frac{1}{n}}$.

Exemple :

1. La racine 3^e de 8 est 2 ; en effet, $2^3 = 8$.
2. La racine 4^e de 81 est 3 ; en effet, $3^4 = 81$.

Définition 5.5. [et propriété] Soit v_0 une valeur subissant n évolutions successives jusqu'à la valeur v_n . On appelle **taux d'évolution moyen** de v_0 à v_n le taux d'évolution qui, appliqué n fois à v_0 permet d'obtenir v_n .

Si on note T le taux d'évolution global de v_0 à v_n et t le taux d'évolution moyen, alors on a

$$1 + T = (1 + t_m)^n \quad \text{ou encore} \quad 1 + t_m = (1 + T)^{\frac{1}{n}}.$$

Démonstration. Soient v_0 une valeur subissant n évolutions successives jusqu'à la valeur v_n , T le taux d'évolution global de v_0 à v_n et t le taux d'évolution moyen. On note K le coefficient multiplicateur de v_0 à v_n , on a $v_n = Kv_0$ et $K = 1 + T$. De même, en notant k_m le coefficient multiplicateur associé au taux d'évolution t_m , on a $k_m = 1 + t_m$. D'après la propriété sur les évolutions successives, on a $v_n = k_m^n v_0$; donc $K = k_m^n$. Par définition de la racine n -ième, $k_m = K^{\frac{1}{n}}$, autrement dit

$$1 + t_m = (1 + T)^{\frac{1}{n}}.$$

□

Exemple : Sur une période de trois ans, les émissions de gaz à effet de serre ont augmenté de 5%. Quel est le taux d'évolution moyen annuel ?

On a $T = 5\% = 0,05$, on en déduit que

$$1 + t_m = (1 + T)^{\frac{1}{3}} = 1,05^{\frac{1}{3}} = 1,016.$$

On a donc un taux d'évolution moyen de $t_m = 1,016 - 1 = 0,016$, soit une augmentation annuelle de 1,6%.

★ Vidéo.

5.4 Attendus et savoir-faire

- Déterminer une proportion connaissant des effectifs et réciproquement.
- Passer d'une proportion à un pourcentage ou une fraction et réciproquement.
- Déterminer un taux d'évolution et un coefficient multiplicateur.

- Passer du taux d'évolution au coefficient multiplicateur et réciproquement.
- Déterminer une grandeur en sachant comment elle a évolué à partir d'une autre.
- Déterminer le coefficient multiplicateur de plusieurs évolutions successives.
- Déterminer une grandeur en sachant comment elle a évolué successivement à partir d'une autre.
- Déterminer un taux d'évolution moyen *.

5.5 Exercices

5.5.1 Démarrage

Exercice 5.1. Dans une ville comportant 3280 foyers, on en dénombre 2890 s'approvisionnant dans les commerces de la ville. Quelle proportion des foyers cela représente-t-il ?

Exercice 5.2. À la session de juin 2018, 52% des candidats à l'ancien bac s'étaient présentés aux séries générales. Le taux de réussite s'est élevé à 91,1% dont 54,1% de mentions.

1. Calculer le pourcentage de bacheliers de séries générales ayant réussi le bac.
2. Calculer le pourcentage de bacheliers de séries générales ayant réussi le bac avec mention.

Exercice 5.3. Déterminer le pourcentage d'évolution dans chacun des cas suivants :

1. De 1940 à 1995, la population mexicaine est passée de 19,7 millions d'habitants à 93,7 millions d'habitants.
2. Le prix d'un article va passer de 65 à 68 euros.

Exercice 5.4. Compléter le tableau suivant :

Évolution (en %)	+55%		-26%	+305%	
Coefficient multiplicateur		$\times 1,4$			$\times 0,35$

Exercice 5.5.

1. Augmenter de 7,5% revient à multiplier par
2. Diminuer de 35% revient à multiplier par
3. Réduire de 75% revient à multiplier par
4. Diminuer de 4,6% revient à multiplier par
5. Augmenter de 0,3% revient à multiplier par

Exercice 5.6. Calculer le taux d'évolution global connaissant les coefficients multiplicateurs intermédiaires dans chacun des cas suivants :

1. $k_1 = 0,4$ et $k_2 = 1,24$;
2. $k_1 = 2$, $k_2 = 0,8$ et $k_3 = 1,05$;
3. $k_1 = -1$, $k_2 = 0,5$ et $k_3 = -2$ et $k_4 = 0,66$.

Exercice 5.7. [*] Déterminer dans chaque cas le taux d'évolution moyen.

1. Taux d'évolution global +37% ; nombre d'évolutions successives 2.
2. Taux d'évolution global +120% ; nombre d'évolutions successives 3.
3. Taux d'évolution global -42% ; nombre d'évolutions successives 4.

5.5.2 Approfondissement

Exercice 5.8. En 2018, on estimait à 33 millions de nombre d'utilisateurs de Facebook en France, soit 1,5% des utilisateurs dans le monde. À combien estime-t-on le nombre d'utilisateurs de Facebook dans le monde en 2018 ?

Exercice 5.9. Un refuge pour animaux accueille 120 chats et chiens issus d'abandons et de sauvetages.

- 30% sont des chats.
- Parmi les chiens, 75% sont issus d'abandons.
- Il y a 32 sauvetages.

	Chats	Chien	Total
Abandons			
Sauvetages			
Total			

1. Recopier et compléter le tableau ci-dessus.
2. Calculer la proportion de chats issus de sauvetages. Arrondir à 0,01% près.

Exercice 5.10. []** Afin de faire du béton pour des fondations, des ouvriers du bâtiment mélange « 7 volumes de gravier pour 5 volumes de sable, 2 volumes de ciment et 1 d'eau ».

1. Quelle proportion de gravier retrouve-t-on dans ce mélange ? Arrondir à 0,01% près.
2. Avec 4m^2 de gravier, quel volume de béton peut-on faire ? Arrondir à $0,01\text{m}^2$.

Exercice 5.11. 54% des salariés d'une entreprise sont de hommes. 7% des hommes et 11% des femmes sont des cadres.

1. Quel est le pourcentage de cadres ?
2. L'entreprise compte 85 cadres. Quel est le nombre total de salariés dans l'entreprise ?

Exercice 5.12. Le prix d'un litre d'essence vaut 1,44€ le 1^{er} Janvier. Au 1^{er} Juillet, il vaut 1,26€.

1. Calculer le pourcentage de diminution du prix de l'essence.
2. Calculer le pourcentage d'évolution nécessaire pour qu'au 1^{er} Aout, le prix du litre d'essence repasse à 1,44€.

Exercice 5.13. Mon employeur me dit « Vous avez besoin de plus d'argent ce mois-ci ? Pas de problèmes, j'augmente votre salaire de 40% pour ce mois-ci, puis je le diminue de 40% le mois prochain ». L'employeur est-il honnête ?

Exercice 5.14. Sur une période de 4 mois, les prix des barils de pétrole ont diminué de 10%. Quel est le taux d'évolution moyen mensuel ?

Exercice 5.15. 1. Après une baisse de 15%, puis une hausse de 15%, un article est vendu :

- (a) plus cher, (b) moins cher, (c) au même prix, (d) la réponse d.

2. Après une hausse de 10% suivie d'une hausse de 5%, un article est vendu avec une augmentation de :

- (a) 15%, (b) 15,5%, (c) 14,5%, (d) la réponse d.

Exercice 5.16. Une somme de 1500 euros est placée en banque au taux de 2,5% à intérêts composés. Calculer le capital disponible au bout de 1 an, puis au bout de 2 ans. Quel est le capital disponible au bout de 5 ans ?

Exercice 5.17. Mr Vroum désire changer de voiture. Un premier concessionnaire lui accorde directement une remise de 10%. Un second, plus dur en affaires, propose une réduction de 5%, mais après négociation, une réduction supplémentaire de 4%. Quel concessionnaire Mr Vroum va-t-il choisir ?

Exercice 5.18. Un employé affirme que son patron gagne 66,7% de plus que lui, mais le patron prétend que son employé ne gagne que 40% de moins que lui. Qui a raison ? Expliquez.

Exercice 5.19. Le prix unitaire d'un produit diminue de 5%. Calculer le pourcentage d'augmentation de la quantité que l'on doit vendre de ce produit afin que la recette augmente de 4%.

Exercice 5.20. Un graphiste doit produire pour un journal une représentation graphique du doublement de la population d'une ville. Afin de représenter la population initiale, il décide de faire des cercles d'associer leurs aires à la population de la ville. Pour représenter la population initiale de la ville, il fait un cercle de rayon 1 puis un cercle de rayon 2 pour représenter le doublement de la population.

1. Calculer l'aire des deux cercles.
2. Calculer le taux d'évolution entre l'aire du premier et du deuxième cercle.
3. Le graphiste a-t-il eu raison de doubler le rayon pour doubler l'aire ?
4. (**) Déterminer comment le graphiste aurait dû faire évoluer le rayon du deuxième cercle pour que son aire double.

Exercice 5.21. [*] Le montant du PIB par habitant en France est passé de 25226€ en 2000 à 33820€.

1. Calculer taux d'évolution global du PIB par habitant en France entre 2000 et 2010.
2. Le taux d'évolution moyen du PIB par habitant dans les pays de l'UE était de 0,9% sur la même période. Comparer avec celui de la France.

Exercice 5.22. [*] Le gouvernement français s'est fixé pour objectif de diviser par 4 les émissions de gaz à effet de serre (GAS) en 2006 et 2050. En 2006, celles-ci s'élevaient à 547Mt équivalent CO₂.

1. Déterminer le taux d'évolution global des émissions de GAS de 2006 à 2050 si l'objectif est atteint.
2. Calculer le taux d'évolution moyen annuel correspondant à cet objectif.

5.5.3 Entraînement

Exercice 5.23. Déterminer le pourcentage d'évolution dans chacun des cas suivants :

1. En 24 heures, la température extérieure est passée de 33 degrés à 20 degrés.
2. Le nombre d'enfants inscrits dans une crèche a triplé en un an.

Exercice 5.24. Compléter le tableau suivant :

Évolution (en %)		+0,3%	-0,3%		
Coefficient multiplicateur	$\times 1,75$			$\times 2$	$\times 0,5$

Exercice 5.25. Déterminer dans chaque cas le pourcentage d'évolution globale.

1. Augmentation de 85% puis augmentation de 5%.
2. Réduction de 15,5% puis hausse de 20%.
3. Inflation de 3% puis réduction de 1%.
4. Diminutions successives de 8%, 8% et 8%.

Exercice 5.26. [*] Déterminer dans chaque cas le taux d'évolution moyen.

1. Taux d'évolution global +22% ; nombre d'évolutions successives 2.
2. Taux d'évolution global -50% ; nombre d'évolutions successives 3.
3. Taux d'évolution global -10% ; nombre d'évolutions successives 5.