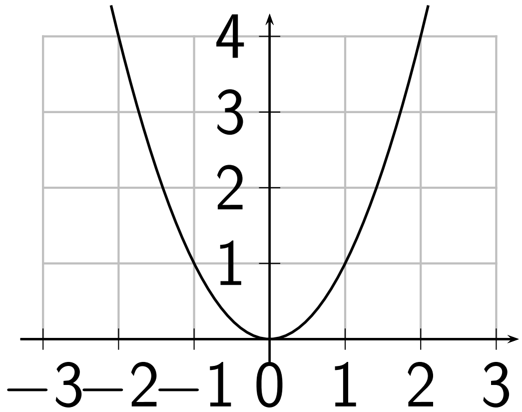
Fonctions carrée et cube

1 Fonction carré

Définition 11.1. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^2$ est appelée* ***fonction carré*** *.*



Représentation graphique : la fonction carrée admet pour représentation graphique la parabole ci-dessus.

Propriété 11.1.

1. *La fonction carré est positive sur $\mathbb{R}$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.*
2. *La fonction carré est décroissante sur $]-\infty\,;0]$ et croissante sur $[0\,;+\infty[$.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

3. *La fonction carrée est paire : pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^2 = x^2$.

Démonstration. Le point *1*. est évident et le point *3*. laissé en exercice. Montrons le point *2*. Soient x et y deux réels tels que $x < y$. On note $f(x) = x^2$. Il s'agit d'étudier le signe de $f(y) - f(x)$:

$$f(y) - f(x) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x).$$

Comme $x < y$, on a $y - x > 0$. Reste à voir le signe de $y + x$.

Cas $x < y < 0$ **:** on a alors $x + y < 0$ et donc $f(y) - f(x) < 0$ donc $f(y) < f(x)$, i.e. f est décroissante sur $]-\infty\,;0]$.

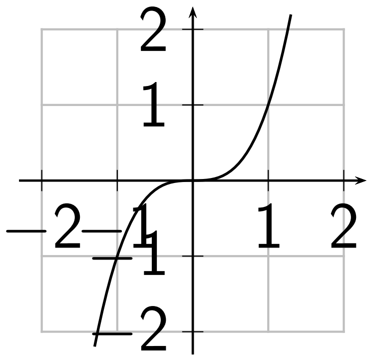
Cas $0 < x < y$ **:** on a alors $x + y > 0$ et donc $f(y) - f(x) > 0$ donc $f(x) < f(y)$, i.e. f est croissante sur $[0\,;+\infty[$.

□

★ **Vidéo.**

2 Fonction cube

Définition 11.2. *La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = x^3$ est appelée* ***fonction cube****.*



Représentation graphique : **la fonction carrée admet pour représentation graphique la courbe ci-dessus.**

Propriété 11.2.

1. *La fonction cube est négative sur* $]-\infty\,;0]$ *et positive sur* $[0\,;+\infty[$ *.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$	

2. *La fonction cube est croissante sur* $\mathbb{R}$*.*

3. *La fonction cube est impaire : pour tout* $x \in \mathbb{R}$, $(-x)^3 = -x^3$ *.*

Démonstration. Exercices. □

3 Positions relatives

Définition 11.3. ***[Rappels]*** *Soient* f *et* g *deux fonctions définies sur un intervalle* I *à valeurs dans* $\mathbb{R}$*. On note* $\mathscr{C}_f$ *et* $\mathscr{C}_g$ *les courbes représentatives de* f *et* g*. On dira que* $\mathscr{C}_f$ *est au dessus de* $\mathscr{C}_g$ *– respectivement en dessous – sur un sous-intervalle* J *de* I *si pour tout* $x \in J$*, on a* $f(x) \geq g(x)$ *– respectivement* $f(x) \leq g(x)$*.*

On pose f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^2$ et $g(x) = x^3$. Pour étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$, il faut déterminer le signe de $f - g$:

$$f(x) - g(x) = x^2 - x^3 = x^2(1 - x).$$

On a

x	0		1		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$1-x$		$+$	0	$-$	
$f-g$		$+$	0	$-$	

Donc $\mathscr{C}_f$ est au dessus de $\mathscr{C}_g$ sur $[0\,;1]$ et en dessous sur $[1\,;+\infty[$.

4 Attendus et savoir-faire

- **Connaître et utiliser les propriétés des fonctions carrée et cube.**
- **Comparer les fonctions carrée et cube entre elles et à d'autres fonctions.**

5 Exercices

5.1 Démarrage

Exercice 11.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 3 par la fonction carré est 9.
2. L'image de -3 par la fonction carré est -9.
3. Un antécédent de 16 par la fonction carré est -4.
4. Un antécédent de -16 par la fonction carré est -4.

Exercice 11.2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $x^2 = 25$.
2. $x^2 = -2$.
3. $3x^2 = 27$.
4. $x^2 \leq 16$.
5. $x^2 < -1$.
6. $x^2 \geq 0$.

Exercice 11.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

1. x^2.
2. $x^2 + 3$.
3. $5x^2 - 1$.

Exercice 11.4.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = x^2 - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = -5x^2 + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 11.5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 3 par la fonction cube est 9.
2. L'image de -3 par la fonction cube est -27.
3. Un antécédent de -27 par la fonction cube est 3.
4. Un antécédent de 64 par la fonction cube est -4.

Exercice 11.6. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $x^3 = 8$.
2. $x^3 = -27$.
3. $x^3 = -64$.
4. $x^3 \leq 64$.
5. $x^3 < -1$.
6. $x^3 \geq 0$.

Exercice 11.7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

1. x^3.
2. $x^3 + 3$.
3. $-5x^3 - 1$.

Exercice 11.8.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3 + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.9. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^2$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

5.2 Approfondissement

Exercice 11.10. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

1. x^2.
2. $x^2 - 3$.
3. $-5x^2 + 1$.

Exercice 11.11. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(3x - 2)^2 = 25$.
2. $(-4x + 1)^2 = 0$.
3. $x^2 > 16$.
4. $x^2 > 0$.
5. $4 \leq x^2 \leq 16$.
6. $10 < x^2 + 1 \leq 37$.

Exercice 11.12.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+4x)^2 - 3$ est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{4}\,;+\infty\right[$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2-(1-3x)^2$ est strictement décroissante sur $\left[\dfrac{1}{3}\,;+\infty\right[$.

Exercice 11.13. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(x+3)^3 = 8$.
2. $-(2x+1)^3 = 27$.
3. $(5-x)^3 = -64$.
4. $8 < x^3 \leq 64$.
5. $-27 \leq x^3 < -1$.
6. $-64 < x^3 \leq 125$.

Exercice 11.14. [Démonstration]

1. Montrer que pour tous réels x et y on a :

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2+y^2+xy).$$

2. En déduire que la fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$, et sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 11.15.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1+4x)^3 - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2-(1-3x)^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.16. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = x^3$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 11.17. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 6x^3$ et $g(x) = -2x^2$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 11.18. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 2t^2$ et $g(t) = -3t^2 - 5$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 11.19. [Démonstration]

1. Montrer que le fonction carrée est impaire.
2. Montrer que le fonction cube est impaire.

Exercice 11.20. Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = 5x^3$.
2. $g(x) = -2x^2 + 3x^4$.
3. $h(x) = x - x^2$.

Exercice 11.21. [Optimisation et Magie] Fred et Georges souhaitent fabriquer une boîte magique de $3m^3$ dont eux seuls pourraient voir le contenu afin d'y cacher toute leur production de farces et attrapes. Pour cela, il dispose de $12m^2$ d'un bois spécialement enchanté pour cet effet. Ils décident de construire leur boîte sous forme de cube et demandent à Hermione son aide pour savoir s'ils ont assez de bois.

1. On note x la longueur d'une arête du cube à construire. Exprimer en fonction de x la surface $S(x)$ de la boîte.
2. En déduire la longueur de l'arête de la plus grosse boîte que l'on puisse réaliser avec $12m^2$ de bois.
3. Quel serait le volume de cette boîte ? Que doit répondre Hermione aux jumeaux Weasley ?

5.3 Entraînement

Exercice 11.22. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $3x^2 - 2 = 25$.
2. $-x^2 + 4 = 0$.
3. $4x^2 < 16$.
4. $-3x^2 < -27$.
5. $25 \leq x^2 \leq 121$.
6. $54 < x^2 + 5 \leq 150$.

Exercice 11.23. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-5 \leq x < -2$, déterminer un encadrement de

1. x^2.
2. $x^2 - 4$.
3. $-2x^2 + 4$.

Exercice 11.24. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $(x-5)^3 = -8$.
2. $(9x+3)^3 = 27$.
3. $(5-x)^3 = 125$.
4. $-64 < x^3$.
5. $-27 \leq x^3 < 8$.
6. $-125 \leq x^3 < 125$.

Exercice 11.25. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-3 < x \leq 1$, déterminer un encadrement de

1. x^3.
2. $x^3 - 1$.
3. $-7x^3 + 4$.

Exercice 11.26.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_-$ par $g(x) = -4x^2 + 3$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_-$ par $g(x) = 2-(1-x)^2$ est décroissante sur $]-\infty\,;1]$.
3. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -5x^3 + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_-$ par $g(x) = 5(3-5x)^3$ est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11.27. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -4x^3$ et $g(x) = 8x^2$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.