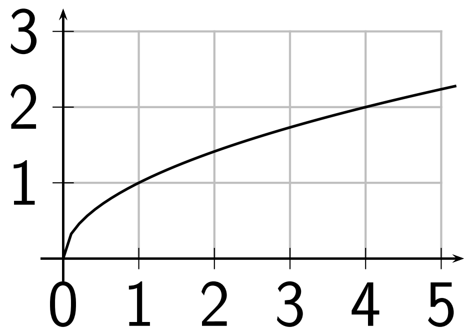
Fonctions Racine et Inverse

1 Fonction racine carrée

Définition 14.1. *La fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ telle que $f(x) = \sqrt{x}$ est appelée* ***fonction racine carrée*** *.*



Représentation graphique : **la fonction racine admet pour représentation graphique la courbe ci-dessus.**

Propriété 14.1.

1. *La fonction racine carrée est positive sur* $[0\,;+\infty[$.
2. *La fonction racine carrée est croissante sur* $[0\,;+\infty[$.

Démonstration. Soient a et b dans $\mathbb{R}_+$ tels que $a < b$. On veut montrer que $f(a) < f(b)$, pour cela, on va étudier le signe de $f(b)-f(a)$. On a – puisque $\sqrt{b}+\sqrt{a}$

est non nul –,

$$\begin{aligned} f(b) - f(a) &= \sqrt{b} - \sqrt{a} \\ &= \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} \\ &= \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}. \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ et $b - a > 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) > 0$, donc que $f(a) < f(b)$. Autrement dit, f est croissante . □

Propriété 14.2. *Soient x, $y \in \mathbb{R}_+$, on a :*

1. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
2. $\sqrt{x + y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Démonstration. Soient x, $y \in \mathbb{R}_+$.

1. On a $\sqrt{xy}^2 = xy$. Or x, $y \in \mathbb{R}_+$, donc $x = \sqrt{x}^2$ et $y = \sqrt{y}^2$, donc

$$\sqrt{xy}^2 = xy = \sqrt{x}^2\sqrt{y}^2 = (\sqrt{x}\sqrt{y})^2.$$

Comme $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{xy} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

2. On a $\sqrt{x+y}^2 = x+y$ et

$$\begin{aligned}(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2 &= \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 \\ &= x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y.\end{aligned}$$

Or $x+y \leq x+2\sqrt{x}\sqrt{y}+y$ car $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$, donc

$$\sqrt{x+y}^2 \leq (\sqrt{x}+\sqrt{y})^2.$$

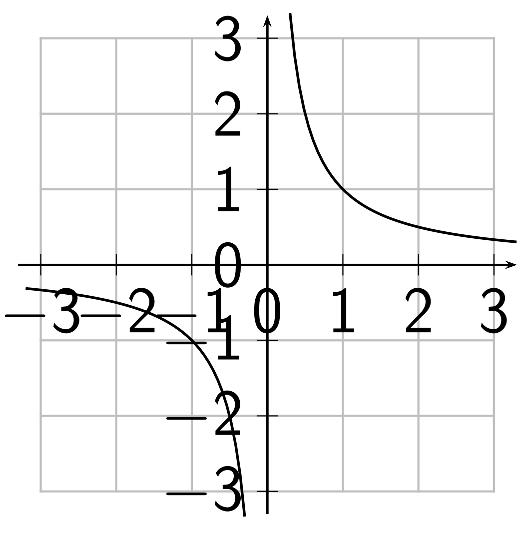
Comme $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$, $\sqrt{x+y} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x}+\sqrt{y}.$$

□

2 Fonction inverse

Définition 14.2. *La fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}^*$ *telle que* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *est appelée* ***fonction inverse***.



Représentation graphique : la fonction racine admet pour représentation graphique l'hyperbole ci-dessus.

Propriété 14.3.

1. *La fonction inverse est négative sur* $]-\infty\,;0[$ *et positive sur* $]0\,;+\infty[$ *.*
2. *La fonction inverse est décroissante sur* $]-\infty\,;0[$ *et* $]0\,;+\infty[$ *.*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\frac{1}{x}$		$-$	$\Vert$	$+$	
$\frac{1}{x}$	0	$\searrow$	$-\infty \;\Vert\; +\infty$	$\searrow$	0

Remarque : la fonction inverse n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$, en effet on a $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) < f(1)$.

Démonstration. Soient a et b dans $]0\,;+\infty[$ tels que $a < b$ (le cas $]-\infty\,;0[$ est laissé en exercice. On veut montrer que $f(a) > f(b)$, pour cela, on va étudier le signe de $f(b) - f(a)$. On a,

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}.$$

Comme $ab > 0$ et $a - b < 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) < 0$, donc que $f(a) > f(b)$. Autrement dit, f est décroissante . □

3 Attendus et savoir-faire

- **Connaître et utiliser les propriétés des fonctions racine et inverse.**
- **Comparer les fonctions racine et inverse à d'autres fonctions.**

4 Exercices

4.1 Démarrage

Exercice 14.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 9 par la fonction racine carré est 3.
2. L'image de -9 par la fonction racine carré est -3.
3. Un antécédent de 4 par la fonction racine carré est 16.
4. Un antécédent de 5 par la fonction racine carré est -25.

Exercice 14.2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{x} = 5$.
2. $\sqrt{x} = -2$.
3. $3\sqrt{x} = 9$.
4. $\sqrt{x} \leq 11$.
5. $\sqrt{x} < -1$.
6. $\sqrt{x} \geq 12$.

Exercice 14.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $9 < x \leq 36$, déterminer un encadrement de

1. $\sqrt{x}$.
2. $\sqrt{x} + 3$.
3. $5\sqrt{x} - 1$.

Exercice 14.4.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \sqrt{x} - 3$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = -5\sqrt{x} + 1$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Exercice 14.5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 3 par la fonction inverse est $-\dfrac{1}{3}$.
2. L'image de $-\dfrac{1}{4}$ par la fonction inverse est -4.
3. Un antécédent de $\dfrac{1}{2}$ par la fonction inverse est 2.
4. Un antécédent de $-\dfrac{6}{5}$ par la fonction inverse est $-\dfrac{5}{6}$.

Exercice 14.6. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{6}$.
2. $\dfrac{1}{x} = -5$.
3. $\dfrac{1}{x} = \dfrac{6}{17}$.
4. $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{5}$.
5. $\dfrac{1}{x} < -1$.
6. $\dfrac{1}{x} \geq 0$.

Exercice 14.7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

1. $\dfrac{1}{x}$.
2. $\dfrac{1}{x} + 3$.
3. $-\dfrac{5}{x} - 1$.

Exercice 14.8.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{x} - 3$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -\dfrac{5}{x} + 1$ est croissante sur $\mathbb{R}_-^*$.

4.2 Approfondissement

Exercice 14.9. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La fonction inverse est décroissante sur $]9\,;+\infty]$.
2. La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^*$.
3. La fonction inverse est décroissante sur $]-9\,;0[\cup\,]0\,;9[$.

Exercice 14.10. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{3x-2}=5$.
2. $\sqrt{-4x+1}=0$.
3. $\sqrt{x}>6$.
4. $\sqrt{x}>0$.
5. $4\leq\sqrt{x}\leq 6$.
6. $8<\sqrt{x}+1\leq 12$.

Exercice 14.11.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=1-\sqrt{x^2+1}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $]-\infty\,;1]$ par $g(x)=4\sqrt{1-x^3}$ est décroissante sur $]-\infty\,;1]$.

Exercice 14.12. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x+3} = 8$.
2. $-\dfrac{1}{2x+1} = 7$.
3. $\dfrac{1}{x+2} = -\dfrac{1}{3}$.
4. $2 < \dfrac{1}{x} \leq 4$.
5. $-2 \leq \dfrac{1}{x} < -\dfrac{1}{2}$.
6. $\dfrac{5}{6} < \dfrac{2}{x+2} \leq \dfrac{6}{5}$.

Exercice 14.13.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x^3+1}$ est croissante sur $]-1\,;+\infty[$.
2. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ et croissantes sur $\mathbb{R}_-$.

Exercice 14.14. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = 6\sqrt{x}$ et $g(x) = -2\sqrt{x}+3$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 14.15. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 14.16. Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f(t) = \dfrac{2}{t}$ et $g(t) = -\dfrac{3}{t} - 5$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 14.17. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x$ et $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Étudier les positions relatives de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

Exercice 14.18. [Démonstration] Montrer que le fonction inverse est impaire.

Exercice 14.19. Étudier la parité des fonctions suivantes :

1. $f(x) = -\dfrac{2}{x}$. 2. $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$. 3. $h(x) = \dfrac{1}{x^3}$.

Exercice 14.20. [Évolutions] On considère un disque de rayon r et de surface S.

1. Exprimer r en fonction de S.
2. On considère un disque de surface $S_1 = 1$. Comment doit évoluer le rayon du disque pour que son aire triple ?
3. Même question pour une diminution de moitié de l'aire du disque.

4.3 Entraînement

Exercice 14.21. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $3\sqrt{x} - 2 = 25$.
2. $-\sqrt{x} + 4 = 0$.
3. $4\sqrt{x} < 16$.
4. $-3\sqrt{x} < -27$.
5. $5 \leq \sqrt{x} \leq 11$.
6. $9 < \sqrt{x} + 5 \leq 13$.

Exercice 14.22. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $6 \leq x < 7$, déterminer un encadrement de

1. $\sqrt{x} - 4$.
2. $-2\sqrt{x} + 4$.
3. $1 + \sqrt{x^2 + 5}$.

Exercice 14.23. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\dfrac{1}{x} - 5 = -8$.
2. $\dfrac{1}{x-5} = 2$.
3. $\dfrac{1}{x+4} = \dfrac{3}{5}$.
4. $-4 < \dfrac{1}{x}$.
5. $-3 \leq \dfrac{1}{x} < -1$.
6. $\dfrac{3}{4} \leq \dfrac{1}{x} < 4$.

Exercice 14.24. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-5 < x \leq -\dfrac{1}{5}$, déterminer un encadrement de

1. $\dfrac{1}{x} - 1$.
2. $-\dfrac{5}{x} + 2$.
3. $1 - \dfrac{2}{x^3 + 1}$.

Exercice 14.25.

1. Montrer que la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = -4\sqrt{x} + 3$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = 1 - \sqrt{-4x^3}$ est croissante sur $\mathbb{R}_-$.
3. Montrer que la fonction f définie sur $[-1\,;1]$ par $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ est croissante sur $[-1\,;0]$ et décroissante sur $[0\,;1]$.
4. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}_-$ par $f(x) = -\dfrac{5}{x} + 1$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
5. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ et décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
6. Montrer que la fonction f définie sur $]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ est décroissante sur $]-1\,;+\infty[$.