

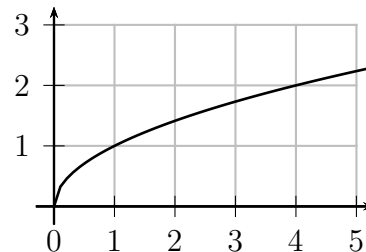
Chapitre 14

Fonctions racine et inverse

14.1 Fonction racine carrée

Définition 14.1. La fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que $f(x) = \sqrt{x}$ est appelée **fonction racine carrée**.

Représentation graphique : la fonction racine admet pour représentation graphique la courbe ci-contre.



Propriété 14.1.

1. La fonction racine carrée est positive sur $[0; +\infty[$.
2. La fonction racine carrée est croissante sur $[0; +\infty[$.

Démonstration. Soient a et b dans \mathbb{R}_+ tels que $a < b$. On veut montrer que $f(a) < f(b)$, pour cela, on va étudier le signe de $f(b) - f(a)$. On a – puisque $\sqrt{b} + \sqrt{a}$ est non nul –,

$$f(b) - f(a) = \sqrt{b} - \sqrt{a} = \frac{(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a})}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} = \frac{b - a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}.$$

Comme $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$ et $b - a > 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) > 0$, donc que $f(a) < f(b)$. Autrement dit, f est croissante. \square

Propriété 14.2. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$, on a :

1. $\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}$;
2. $\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}$.

Démonstration. Soient $x, y \in \mathbb{R}_+$.

1. On a $\sqrt{xy^2} = xy$. Or $x, y \in \mathbb{R}_+$, donc $x = \sqrt{x^2}$ et $y = \sqrt{y^2}$, donc

$$\sqrt{xy^2} = xy = \sqrt{x^2}\sqrt{y^2} = (\sqrt{x}\sqrt{y})^2.$$

Comme $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{xy} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

$$\sqrt{xy} = \sqrt{x}\sqrt{y}.$$

2. On a $\sqrt{x+y^2} = x + y$ et

$$(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2 = \sqrt{x}^2 + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + \sqrt{y}^2 = x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y.$$

Or $x + y \leq x + 2\sqrt{x}\sqrt{y} + y$ car $\sqrt{x}\sqrt{y} \geq 0$, donc

$$\sqrt{x+y^2} \leq (\sqrt{x} + \sqrt{y})^2.$$

Comme $\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{x+y} \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que

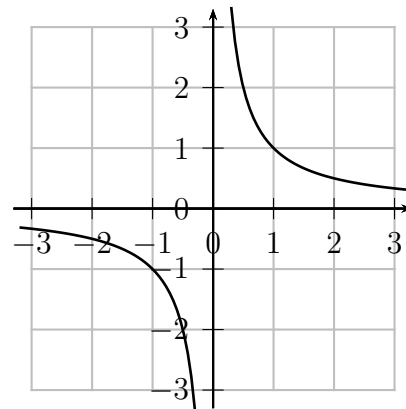
$$\sqrt{x+y} \leq \sqrt{x} + \sqrt{y}.$$

□

14.2 Fonction inverse

Définition 14.2. La fonction f définie sur \mathbb{R}^* telle que $f(x) = \frac{1}{x}$ est appelée **fonction inverse**.

Représentation graphique : la fonction racine admet pour représentation graphique l'**hyperbole** ci-contre.



Propriété 14.3.

1. La fonction inverse est négative sur $]-\infty; 0[$ et positive sur $]0; +\infty[$.
2. La fonction inverse est décroissante sur $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------------|-----------------|-----------|-------------------------|
| $\frac{1}{x}$ | | - | + |
| $\frac{1}{x}$ | $0 \rightarrow$ | $-\infty$ | $+\infty \rightarrow 0$ |

Remarque : la fonction inverse n'est pas décroissante sur \mathbb{R}^* , en effet on a $-1 < 1$ et pourtant $f(-1) < f(1)$.

Démonstration. Soient a et b dans $]0; +\infty[$ tels que $a < b$ (le cas $]-\infty; 0[$ est laissé en exercice. On veut montrer que $f(a) > f(b)$, pour cela, on va étudier le signe de $f(b) - f(a)$. On a,

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a - b}{ab}.$$

Comme $ab > 0$ et $a - b < 0$, on en déduit que $f(b) - f(a) < 0$, donc que $f(a) > f(b)$. Autrement dit, f est décroissante. \square

14.3 Attendus et savoir-faire

- Connaître et utiliser les propriétés des fonctions racine et inverse.
- Comparer les fonctions racine et inverse à d'autres fonctions.

14.4 Exercices

14.4.1 Démarrage

Exercice 14.1. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 9 par la fonction racine carré est 3.
2. L'image de -9 par la fonction racine carré est -3.
3. Un antécédent de 4 par la fonction racine carré est 16.
4. Un antécédent de 5 par la fonction racine carré est -25.

Exercice 14.2. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- | | | |
|----------------------|-------------------------|-------------------------|
| 1. $\sqrt{x} = 5$. | 3. $3\sqrt{x} = 9$. | 5. $\sqrt{x} < -1$. |
| 2. $\sqrt{x} = -2$. | 4. $\sqrt{x} \leq 11$. | 6. $\sqrt{x} \geq 12$. |

Exercice 14.3. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $9 < x \leq 36$, déterminer un encadrement de

- | | | |
|-----------------|---------------------|----------------------|
| 1. \sqrt{x} . | 2. $\sqrt{x} + 3$. | 3. $5\sqrt{x} - 1$. |
|-----------------|---------------------|----------------------|

Exercice 14.4.

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = \sqrt{x} - 3$ est croissante sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = -5\sqrt{x} + 1$ est strictement décroissante sur \mathbb{R}_+ .

Exercice 14.5. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses. Justifier si elles sont fausses.

1. L'image de 3 par la fonction inverse est $-\frac{1}{3}$.
2. L'image de $-\frac{1}{4}$ par la fonction inverse est -4.
3. Un antécédent de $\frac{1}{2}$ par la fonction inverse est 2.
4. Un antécédent de $-\frac{6}{5}$ par la fonction inverse est $-\frac{5}{6}$.

Exercice 14.6. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\frac{1}{x} = \frac{1}{6}$.
2. $\frac{1}{x} = -5$.
3. $\frac{1}{x} = \frac{6}{17}$.
4. $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{5}$.
5. $\frac{1}{x} < -1$.
6. $\frac{1}{x} \geq 0$.

Exercice 14.7. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $3 < x \leq 7$, déterminer un encadrement de

1. $\frac{1}{x}$.
2. $\frac{1}{x} + 3$.
3. $-\frac{5}{x} - 1$.

Exercice 14.8.

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{x} - 3$ est décroissante sur \mathbb{R}_+^* .
2. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -\frac{5}{x} + 1$ est croissante sur \mathbb{R}_-^* .

14.4.2 Approfondissement

Exercice 14.9. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier.

1. La fonction inverse est décroissante sur $]9; +\infty[$.
2. La fonction inverse est décroissante sur \mathbb{R}^* .
3. La fonction inverse est décroissante sur $] -9; 0[\cup] 0; 9[$.

Exercice 14.10. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\sqrt{3x-2} = 5$.
2. $\sqrt{-4x+1} = 0$.
3. $\sqrt{x} > 6$.
4. $\sqrt{x} > 0$.
5. $4 \leq \sqrt{x} \leq 6$.
6. $8 < \sqrt{x} + 1 \leq 12$.

Exercice 14.11.

1. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 1 - \sqrt{x^2+1}$ est croissante sur \mathbb{R}_- .
2. Montrer que la fonction g définie sur $] -\infty; 1[$ par $g(x) = 4\sqrt{1-x^3}$ est décroissante sur $] -\infty; 1[$.

Exercice 14.12. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $\frac{1}{x+3} = 8$.
2. $-\frac{1}{2x+1} = 7$.
3. $\frac{1}{x+2} = -\frac{1}{3}$.
4. $2 < \frac{1}{x} \leq 4$.
5. $-2 \leq \frac{1}{x} < -\frac{1}{2}$.
6. $\frac{5}{6} < \frac{2}{x+2} \leq \frac{6}{5}$.

Exercice 14.13.

1. Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3+1}$ est croissante sur $] -1; +\infty[$.
2. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ et croissantes sur \mathbb{R}_- .

Exercice 14.14. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = 6\sqrt{x}$ et $g(x) = -2\sqrt{x}+3$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 14.15. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R}_+ par $f(x) = x$ et $g(x) = \sqrt{x}$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 14.16. Soient f et g deux fonctions définies sur \mathbb{R}^* par $f(t) = \frac{2}{t}$ et $g(t) = -\frac{3}{t} - 5$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 14.17. Soient les fonctions f et g définies sur \mathbb{R} par $f(x) = x$ et $g(x) = \frac{1}{x}$. Étudier les positions relatives de \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

Exercice 14.18. [Démonstration] Montrer que le fonction inverse est impaire.

Exercice 14.19. Étudier la parité des fonctions suivantes :

$$1. f(x) = -\frac{2}{x}. \qquad 2. g(x) = \frac{1}{x^2}. \qquad 3. h(x) = \frac{1}{x^3}.$$

Exercice 14.20. [Évolutions] On considère un disque de rayon r et de surface S .

1. Exprimer r en fonction de S .
2. On considère un disque de surface $S_1 = 1$. Comment doit évoluer le rayon du disque pour que son aire triple ?
3. Même question pour une diminution de moitié de l'aire du disque.

14.4.3 Entraînement

Exercice 14.21. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1. 3\sqrt{x} - 2 = 25. & 3. 4\sqrt{x} < 16. & 5. 5 \leq \sqrt{x} \leq 11. \\ 2. -\sqrt{x} + 4 = 0. & 4. -3\sqrt{x} < -27. & 6. 9 < \sqrt{x} + 5 \leq 13. \end{array}$$

Exercice 14.22. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $6 \leq x < 7$, déterminer un encadrement de

$$1. \sqrt{x} - 4. \qquad 2. -2\sqrt{x} + 4. \qquad 3. 1 + \sqrt{x^2 + 5}.$$

Exercice 14.23. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$$\begin{array}{lll} 1. \frac{1}{x} - 5 = -8. & 3. \frac{1}{x+4} = \frac{3}{5}. & 5. -3 \leq \frac{1}{x} < -1. \\ 2. \frac{1}{x-5} = 2. & 4. -4 < \frac{1}{x}. & 6. \frac{3}{4} \leq \frac{1}{x} < 4. \end{array}$$

Exercice 14.24. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $-5 < x \leq -\frac{1}{5}$, déterminer un encadrement de

$$1. \frac{1}{x} - 1. \qquad 2. -\frac{5}{x} + 2. \qquad 3. 1 - \frac{2}{x^3 + 1}.$$

Exercice 14.25.

1. Montrer que la fonction g définie sur \mathbb{R}_+ par $g(x) = -4\sqrt{x} + 3$ est décroissante sur \mathbb{R}_+ .
2. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}_- par $f(x) = 1 - \sqrt{-4x^3}$ est croissante sur \mathbb{R}_- .
3. Montrer que la fonction f définie sur $[-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ est croissante sur $[-1; 0]$ et décroissante sur $[0; 1]$.
4. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R}_- par $f(x) = -\frac{5}{x} + 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_+^* .
5. Montrer que la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ est strictement croissante sur \mathbb{R}_- et décroissante sur \mathbb{R}_+ .
6. Montrer que la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x + 1}}$ est décroissante sur $] -1; +\infty[$.