Chapitre 3

Géométrie plane

3.1 Repère du plan

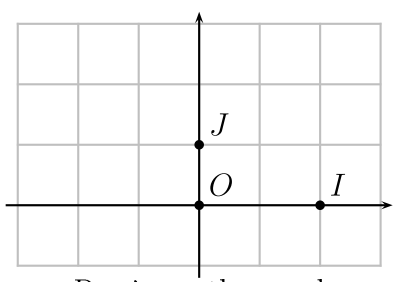
Définition 3.1. *Soient O, I et J trois points distincts du plan. (O, I, J) est un repère :*

— ***quelconque*** *si le triangle OIJ est quelconque ;*

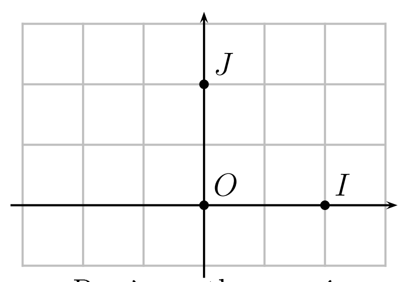
— ***orthogonal*** *si le triangle OIJ est rectangle en O ;*

— ***orthonormé*** *si le triangle OIJ est rectangle et isocèle en O.*

Le point O est l'origine du repère, la droite (OI) est appelée axe des abscisses et la droite (OJ) des ordonnées.



Repère orthogonal



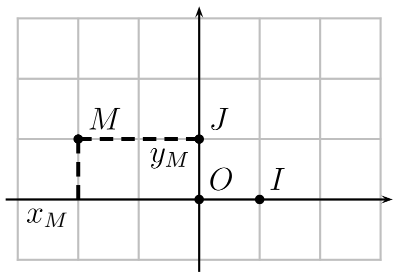
Repère orthonormé

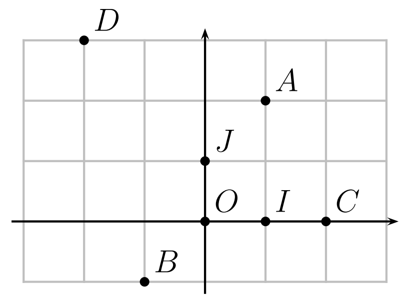
Définition 3.2. *Soient (O, I, J) un repère orthonormé du plan et M un point quelconque du plan. La parallèle à (OJ) passant par M coupe l'axe (OI) en P et la parallèle à (OI) passant par M coupe l'axe (OJ) en Q.*

— ***L'abscisse*** *x_M de M dans le repère (O, I, J) est l'abscisse de P dans le repère (O, I) de l'axe (OI).*

— ***L'ordonnée*** *y_M de M dans le repère (O, I, J) est l'abscisse de Q dans le repère (O, J) de l'axe (OJ).*

— *Les coordonnées de M sont notées $M\,(x_M\,;y_M)$.*





Exemples : Dans le repère OIJ ci-dessus à droite, les points A et B ont pour coordonnées $A\,(1\,;2)$ et $B\,(-1\,;-1)$. De même, on place $C\,(2\,;0)$ et $D\,(-2\,;3)$.

Propriété 3.1. *Deux points sont* ***confondus*** *si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.*

★ Vidéo.

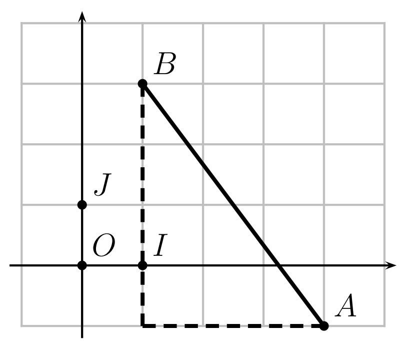
3.2 Distance

Propriété 3.2. *Soient A et B deux points de coordonnées respectives (x_A, y_A) et (x_B, y_B) dans un repère orthonormé. On a*

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

Exemple : Soient $A\,(4\,;-1)$ et $B\,(1\,;3)$ deux points d'un repère orthonormé.
La distance entre A et B est :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(1-4)^2 + (3-(-1))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9+16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$



★ Vidéo.

3.3 Milieu

Propriété 3.3. *Soient A et B deux points de coordonnées (x_A, y_A) et (x_B, y_B) d'un repère du plan. Le milieu M du segment $[AB]$ a pour coordonnées :*

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \textit{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

Exemple : Soient $A(5,3)$ et $B(2,7)$ deux points d'un repère. Alors les coordonnées du milieu M de $[AB]$ sont

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5+2}{2} = 3,5$$

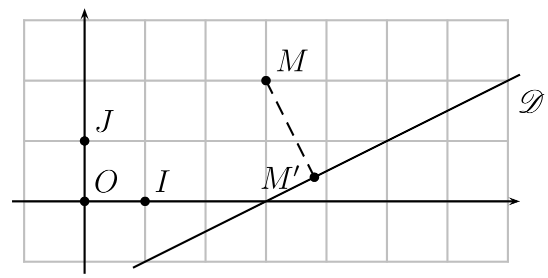
et

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3+7}{2} = 5.$$

★ Vidéo.

3.4 Projeté orthogonal

Définition 3.3. *Soient $\mathscr{D}$ une droite et M un point qui n'appartient pas à $\mathscr{D}$. On dit que M' est le* ***projeté orthogonal*** *de M sur $\mathscr{D}$ lorsque $M' \in \mathscr{D}$ et (MM') est perpendiculaire à $\mathscr{D}$.*



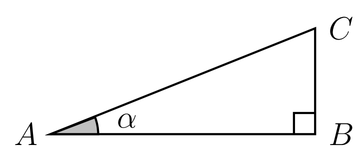
Propriété 3.4. *Soient $\mathscr{D}$ une droite et M un point qui n'appartient pas à $\mathscr{D}$. Le projeté orthogonal de M est sur $\mathscr{D}$ est le point de $\mathscr{D}$ le plus proche de M.*

Démonstration. Exercice. □

3.5 Trigonométrie

Définition 3.4. *Soit ABC un triangle rectangle en B. On définit le* ***cosinus*** *et le* ***sinus*** *de l'angle $\alpha = \widehat{BAC}$ comme :*

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC}.$$

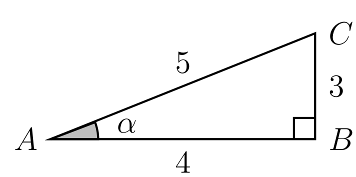


Remarque : on a en fait

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypoténuse}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypoténuse}}.$$

Exemple : Soit ABC le triangle rectangle ci-contre. On a

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} = 0,8 \qquad \text{et} \qquad \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6.$$



Propriété 3.5. *Soit α la mesure d'un angle dans un triangle rectangle. On a :*

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

Démonstration. Soit ABC un triangle rectangle en B ; on note $\alpha = \widehat{BAC}$. Alors

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1,$$

d'après le théorème de Pythagore car ABC est rectangle en B. □

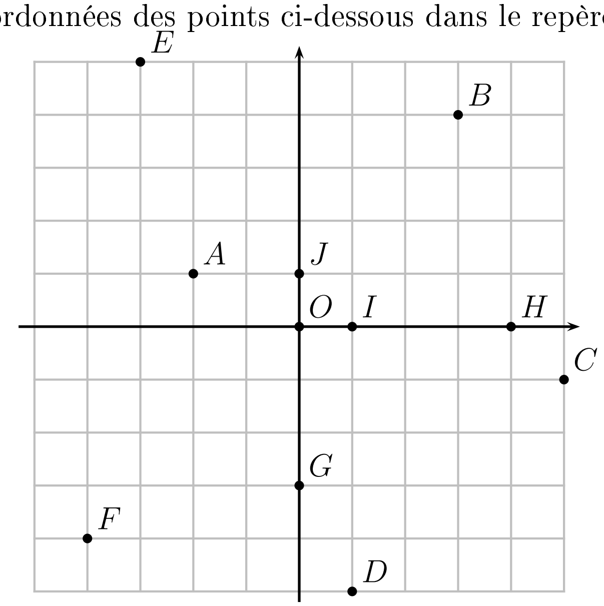
3.6 Attendus et savoir-faire

- Lire les coordonnées d'un point dans un repère et y placer un point dont on connaît les coordonnées.
- Calculer le milieu / la distance entre deux points.
- Construire le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Calculer un cosinus ou un sinus.
- Connaître les propriétés du cosinus et du sinus.

3.7 Exercices

3.7.1 Démarrage

Exercice 3.1. Lire les coordonnées des points ci-dessous dans le repère $(O\,;I\,;J)$.



Exercice 3.2. En reprenant l'exercice 3.1, calculer les distances AB, BC et AC.

Exercice 3.3. En reprenant l'exercice 3.1, calculer les milieux de $[AB]$, $[BC]$ et $[AC]$.

Exercice 3.4. Dans un repère orthonormé, placer les points $A\,(5\,;3)$, $B\,(-1\,;-2)$ et $C\,(3\,;-1)$ puis construire le projeté orthogonal de C sur (AB). Quels sont ses coordonnées approximatives ?

Exercice 3.5. Soit ABC un triangle rectangle en B. Dans chacun des cas, calculer BC et en déduire $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ et $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$.

1. $AB = 3$ et $AC = 4$.
2. $AB = 10$ et $AC = 5$.
3. $AB = 7$ et $AC = 11$.

3.7.2 Approfondissement

Exercice 3.6. Soient $A\,(2\,;4)$, $B\,(5\,;-1)$, $C\,(8\,;4)$ et $D\,(0\,;-4)$.

1. Montrer que ABC est isocèle en B.
2. Quelle est la nature du triangle ABD ?

Exercice 3.7. On considère les points $A\left(4\,;2\sqrt{3}\right)$ et $B\left(-1\,;3\sqrt{3}\right)$. Le triangle OAB est-il équilatéral ? Justifier.

Exercice 3.8. Soient $A\,(2\,;4)$, $B\,(6\,;3)$, $C\,(8\,;1)$ et $D\,(4\,;2)$.

1. Calculer les coordonnées de K milieu de $[AC]$.
2. Calculer les coordonnées de L milieu de $[BD]$.
3. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

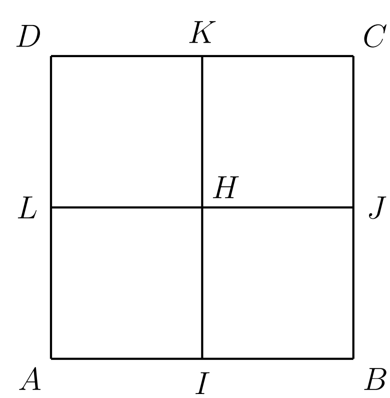
Exercice 3.9. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées de D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1. $A\,(-1\,;-1)$, $B\,(0\,;-5)$ et $C\,(4\,;3)$.
2. $A\,(0\,;3)$, $B\,(8\,;2)$ et $C\,(5\,;-3)$.

Exercice 3.10. On considère les points $A\,(2\,;4)$, $B\,(0\,;-4)$, $C\,(8\,;-6)$ et $D\,(10\,;2)$. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier.

Exercice 3.11. On considère le carrés $ABCD$ et I, J, K et L les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AB]$ comme sur la figure ci-contre. Quel est le projeté orthogonal de :

1. K sur (AB) ?
2. K sur (JB) ?
3. D sur (LH) ?
4. H sur (CD) ?
5. L sur (AD) ?
6. I sur (AI) ?
7. C sur (BD) ?
8. D sur (CH) ?



Exercice 3.12. **[Démonstration]** Soit Δ une droite et M un point n'appartenant pas à Δ. On note P le projeté orthogonal de M sur Δ. On souhaite montrer que P est le point de Δ le plus proche de M, pour cela on va comparer la distance MP avec la distance MA où A est un autre point de Δ distinct de P.

1. Faire un croquis représentant la situation.
2. Justifier que l'on a $MA^2 = MP^2 + AP^2$.
3. En déduire que $MA^2 \geq MP^2$.
4. En conclure que $MA \geq MP$.

Exercice 3.13. Soit ABC un triangle rectangle en C. On sait que $AC = 2\sqrt{2}$ et $\sin\left(\widehat{CAB}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, déterminer AB puis $\cos\left(\widehat{CAB}\right)$.

Exercice 3.14. Soit ABC un triangle rectangle en A. On sait que $BC = 3\sqrt{3}$ et $\cos\left(\widehat{ABC}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, déterminer $\sin\left(\widehat{ABC}\right)$.

3.7.3 Entraînement

Exercice 3.15. En reprenant l'exercice 3.1, calculer les distances CD, DE, EF, FG, GH, HA, FH, IG, JA.

Exercice 3.16. En reprenant l'exercice 3.1, calculer les milieux des segments $[CD]$, $[DE]$, $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$, $[HA]$, $[FH]$, $[IG]$, $[JA]$.

Exercice 3.17. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées de D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

1. $A\,(2\,;-3)$, $B\,(-1\,;5)$ et $C\,(-3\,;0)$.
2. $A\,(1\,;1)$, $B\,(0\,;-4)$ et $C\,(4\,;4)$.

Exercice 3.18. Dans chacun des cas suivants, placer les points A, B et C dans un repère orthonormé puis construire le projeté orthogonal de C sur (AB). Donner les coordonnées approximatives de ce dernier.

1. $A\,(-1\,;4)$, $B\,(3\,;2)$ et $C\,(4\,;5)$.
2. $A\,(1\,;-4)$, $B\,(5\,;-2)$ et $C\,(0\,;1)$.
3. $A\,(3\,;-1)$, $B\,(4\,;4)$ et $C\,(-2\,;0)$.
4. $A\,(-2\,;-3)$, $B\,(0\,;-3)$ et $C\,(-6\,;0)$.

Exercice 3.19. Soit ABC un triangle rectangle en B. Dans chacun des cas, calculer BC et en déduire $\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ et $\sin\left(\widehat{BAC}\right)$.

1. $AB = 5$ et $AC = 9$.
2. $AB = 8$ et $AC = 13$.
3. $AB = 20$ et $AC = 6$.