Chapitre 10

Probabilités

10.1 Expérience aléatoires et événements

Définition 10.1.

- *Une expérience est dite* ***aléatoire*** *lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.*
- *On appelle* ***issue*** *d'une expérience aléatoire tout résultat possible de cette expérience.*
- ***L'univers*** *associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de ses issues. On le note généralement Ω (lettre grecque « oméga »).*

Exemple : Le tirage une carte d'un jeu de 52 cartes. Il s'agit bien d'une expérience aléatoire car on ne peut pas connaître à l'avance la carte que l'on va tirer (sauf si l'on est magicien). L'univers associé à cette expérience est

$$\{1\diamondsuit, 2\diamondsuit, ..., \text{D}\spadesuit, \text{R}\spadesuit\}.$$

Une issue possible est de tirer un trèfle par exemple.

Définition 10.2. *On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω.*

- *On appelle* ***événement*** *toute partie de Ω.*
- ***L'événement certain*** *contient toutes les issues de Ω.*
- ***L'événement impossible*** *ne contient aucune issue, on le note $\emptyset$ (on dit « ensemble vide »).*
- *On appelle* ***événement élémentaire*** *tout événement ne contenant qu'une seule issue.*

Exemple :

- On reprend l'exemple du jeu de cartes, un exemple d'événement est de tirer un pique, il peut s'écrire sous la forme
$$\spadesuit = \{1\spadesuit, ..., \text{R}\spadesuit\}.$$
- Un événement élémentaire est de tirer le valet de trèfle par exemple.

10.2 Opérations sur les événements

Définition 10.3. *On considère une expérience aléatoire d'univers Ω.*

- *On note $A \cup B$ l'événement constitué des issues appartenant à A **ou** à B, on le lit « A **union** B ».*
- *On note $A \cap B$ l'événement constitué des issues appartenant à A **et** à B. On le lit « A **intersection** B ».*
- *On note $\overline{A}$ l'événement constitué des issues de Ω qui ne sont pas dans A, on l'appelle **événement contraire** ou **complémentaire** de A.*
- *Deux événements A et B de Ω sont dits **incompatibles** ou **disjoints** si on a $A \cap B = \emptyset$.*

Exemple :

1. On reprend l'exemple du jeu de cartes et considère deux événements : A « tirer un carreau » et B « tirer une dame ».
   L'événement $A \cup B$ est « tirer un carreau ou une dame » et s'écrit :
   $$A \cup B = \{1\diamondsuit, ..., \mathrm{D}\diamondsuit, \mathrm{R}\diamondsuit, \mathrm{D}\clubsuit, \mathrm{D}\heartsuit, \mathrm{D}\spadesuit\}.$$
   L'événement $A \cap B$ est « tirer la dame de carreau » et s'écrit : $A \cap B = \{\mathrm{D}\diamondsuit\}$.
   L'événement contraire de $\overline{A}$ est « tirer un trèfle, un pique ou cœur » et s'écrit
   $$\overline{A} = \clubsuit \ \cup \ \spadesuit \ \cup \ \heartsuit.$$

10.3 Probabilité d'un événement

Propriété 10.1. *On considère une expérience aléatoire dont l'ensemble des issues possibles est l'univers Ω. Lorsque cette expérience est répétée un très grand nombre de fois, la fréquence de réalisation d'une issue $e \in \Omega$ se stabilise (converge) autour (vers) un nombre p. Ce nombre p est appelé **probabilité de l'issue** e.*

Définition 10.4.

1. *On considère un univers $\Omega = \{e_1, ..., e_n\}$. Définir une **loi de probabilité** pour une expérience aléatoire dont l'ensemble des issues possibles est Ω consiste à attribuer à chaque issue e_i une valeur $p_i \in [0, 1]$ – appelée **probabilité de** e_i –, pour $i \in \{1, ..., n\}$ telle que*
   $$p_1 + ... + p_n = 1.$$
2. *La probabilité d'un événement A est notée $\mathbb{P}(A)$ et est la somme des probabilités des issues qui réalisent A.*

Exemple : On considère un dé à 6 faces truqué. En lançant plusieurs millier de fois le dé, on obtient les fréquences d'apparition de chaque faces :

Face	1	2	3	4	5	6
Fréquence	0,1	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2

La probabilité d'obtenir une face avec un nombre pair est

$$p = 0,2 + 0,3 + 0,3 = 0,7.$$

Propriété 10.2. *Soient Ω un univers et A un événement de Ω.*

1. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
2. $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
3. $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

Propriété 10.3. *On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω sur lequel a été défini une loi de probabilité. Soient A et B deux événements de Ω. On a :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Si de plus A et B sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

En particulier :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Exemple : Dans une population, la probabilité qu'une personne soit végane est de 0,01, qu'elle soit usagère des transports en commun de 0,4 et qu'elle soit végane et prenne les transports en commun de 0,009.

On tire au sort une personne dans la population. On note V l'événement « la personne est végane » et G « la personne prend les transports en commun ». On a donc $\mathbb{P}(V) = 0,01$, $\mathbb{P}(T) = 0,4$ et $\mathbb{P}(V \cap T) = 0,009$.

La probabilité que la personne ne soit pas végane est donc

$$\mathbb{P}(\overline{V}) = 1 - \mathbb{P}(V) = 1 - 0,01 = 0,99.$$

La probabilité que la personne soit végane ou prenne les transports en commun est donc

$$\mathbb{P}(V \cup T) = \mathbb{P}(V) + \mathbb{P}(T) - \mathbb{P}(V \cap T) = 0,4 + 0,01 - 0,009 = 0,401.$$

★ Vidéo.

10.4 Équiprobabilité et arbre pondéré

10.4.1 Équiprobabilité

Définition 10.5. *On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω sur lequel a été défini une loi de probabilité. On parle d'**équiprobabilité** lorsque les probabilités associées à chaque issue sont identiques. Soit A un événement de Ω. On a alors :*

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\textit{nombre d'issues favorables à } A}{\textit{nombre d'issues de } \Omega}.$$

Exemple : On reprend l'exemple du jeu de cartes. Il s'agit d'une situation d'équiprobabilité puisque chaque a autant de chance qu'une autre d'être tirée : 1/52 dans un jeu de 52 cartes.

La probabilité de tirer un trèfle est donc – puisque qu'il y a 13 trèfles dans le jeu –

$$\mathbb{P}(\clubsuit) = \frac{13}{52} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

10.4.2 Arbre pondéré

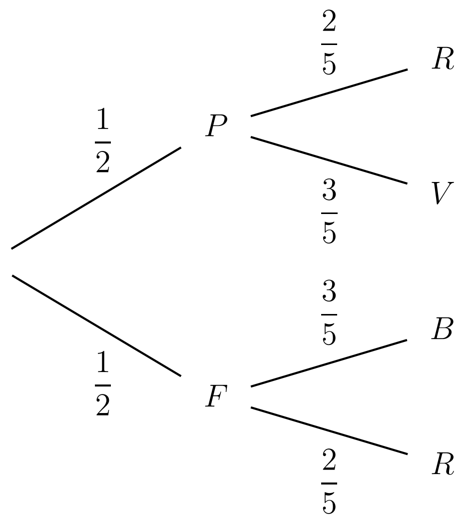
Un **arbre pondéré** est un **graphe** décrivant les différents chemins permettant d'accéder à un événement en passant par d'autres événements. Il est constitué de **nœuds** où sont placés les événements et de **branches** liant ces différents événements et affichant la probabilité de l'événement suivant sachant celle du précédent.

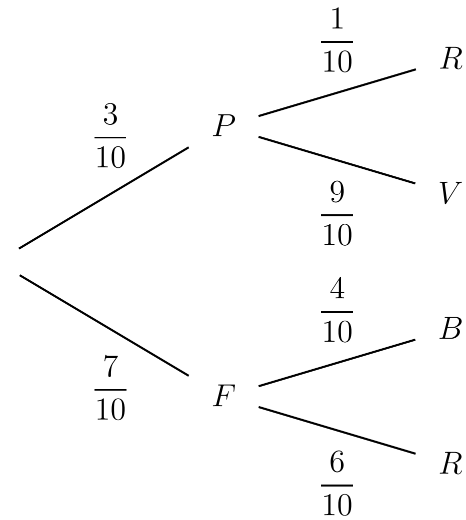
Propriété 10.4. *Règles d'un arbre de probabilités.*

1. *La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.*
2. *La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches constituantes de ce chemin.*
3. *La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des différents chemins menant à l'événement.*

Exemple : Considérons le cas d'un jeu à deux épreuves ; la première consiste en un pile ou face ; si l'on fait pile, la seconde épreuve consiste à tirer une boule au hasard dans une urne contenant deux boules rouge et trois verte ; si l'on fait face, l'urne contient deux boules rouge et trois boules verte.

L'univers ici est $\{P \cap R, P \cap V, F \cap R, F \cap V\}$ et l'arbre le décrivant est celui ci-dessous à gauche :





La probabilité de tirer une boule rouge est donc

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(P \cap R) + \mathbb{P}(F \cap R) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{2}{5}.$$

Supposons maintenant que la pièce est truquée et que le nombre de boules dans chaque urne a changé si bien que l'arbre décrivant l'épreuve est celui ci-dessus à droite. Alors la probabilité de tirer une boule rouge est donc

$$\mathbb{P}(R) = \mathbb{P}(P \cap R) + \mathbb{P}(F \cap R) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{6}{10} = \frac{45}{100}.$$

★ Vidéo.

10.5 Attendus et savoir-faire

— Déterminer l'union, l'intersection et le complémentaire d'événements.

— Construire une loi de probabilités ; calculer la probabilité d'un événement.

— Utiliser la formule liant les probabilités d'intersection et d'union d'événements.

— Modéliser une situation par un arbre de probabilité.

— Compléter un arbre de probabilité.

— Utiliser un arbre pour calculer des probabilités.

10.6 Exercices

10.6.1 Démarrage

Exercice 10.1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 52 cartes.

1. Déterminer la probabilité d'obtenir un roi.
2. Déterminer la probabilité d'obtenir l'as de pique.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir une figure.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir un cœur ou une figure.

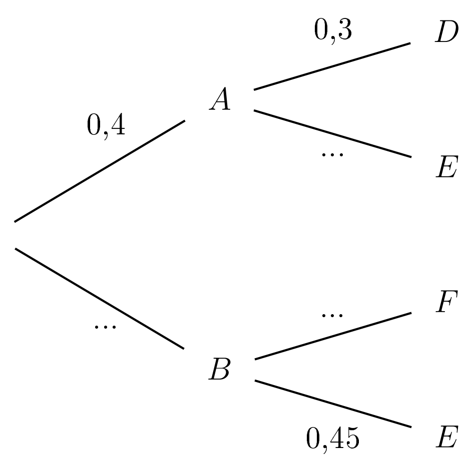
Exercice 10.2. Soient A et B deux évènements de Ω tels que :

$$\mathbb{P}(A) = 0,2, \quad \mathbb{P}(B) = 0,6 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(A \cap B) = 0,15.$$

1. Déterminer $\mathbb{P}(\overline{A})$ et $\mathbb{P}(\overline{B})$.
2. Déterminer $\mathbb{P}(A \cup B)$.

Exercice 10.3.

1. Compléter l'arbre pondéré ci-contre.
2. Déterminer $\mathbb{P}(D)$ et $\mathbb{P}(F)$.
3. Déterminer $\mathbb{P}(E)$.



10.6.2 Approfondissement

Exercice 10.4. Dans un parc d'attractions, un tirage au sort va être effectué pour un prix qui permettra d'avoir accès au parc illimité aux enfants durant un week-end.
Les responsables du parc ont réalisé une étude statistique sur la composition des familles participant au jeu.

Nombre d'enfants par famille	0	1	2	3	4	5 et plus
Fréquence (en %)	5	20	35	21	16	3

Sachant qu'un seul bulletin est accepté par famille, déterminer :

1. La probabilité de l'évènement A : « la famille gagnante a un enfant ».
2. La probabilité de l'évènement B : « la famille gagnante a au moins trois enfants ».
3. La probabilité de l'évènement C : « la famille gagnante a entre un et quatre enfants ».

Exercice 10.5. Ariane pioche dans une boîte de bonbons opaque et prend une friandise. Sachant que dans cette boîte il y en a 6 à la fraise, 5 à l'orange, 3 au citron, 3 à la pomme, 2 au coca, 4 à la framboise, 2 à la rose, 5 à l'ice-tea, déterminer :

1. Soit A l'évènement « Ariane prend un bonbon au citron ». Déterminer $\mathbb{P}(A)$.
2. Quelle est la probabilité qu'Ariane prenne un bonbon à la fraise ?
3. Quelle est la probabilité qu'Ariane prenne un bonbon aux fruits ?

Exercice 10.6. Soient A et B deux évènements de Ω.

1. Si $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,27$, $\mathbb{P}(B) = 0,24$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,09$, calculer $\mathbb{P}(A)$.
2. Si $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,7$, $\mathbb{P}(A) = 0,14$ et $\mathbb{P}(B) = 0,59$, calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.

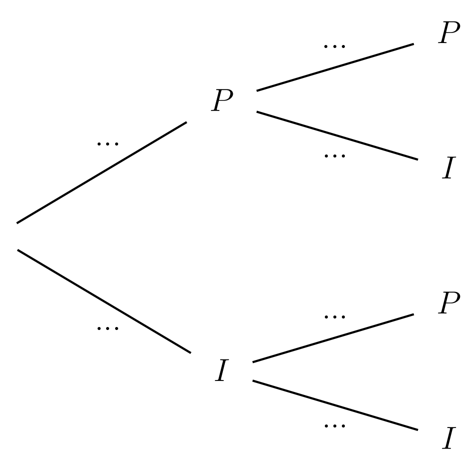
Exercice 10.7. Calculer les probabilités $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)$ et $\mathbb{P}\left(\overline{A \cap B}\right)$ dans les cas suivants :

1. $\mathbb{P}(A) = 0,15$, $\mathbb{P}(B) = 0,21$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,1$.
2. $\mathbb{P}(A) = 0,13$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,05$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,16$.

Exercice 10.8. On lance deux fois un dé à six faces truqué dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant :

Face	1	2	3	4	5	6
Probabilité	0,2	0,1	0,4	0,15	0,05	0,1

1. Quelle est la probabilité d'obtenir un 3 ou plus à un lancer de dé ? Un impair ?
2. Lors des deux lancers de dé on s'intéresse à la parité de la somme des deux lancers. Pour cela, à chaque lancer on note si le nombre obtenu est pair ou impair.
   (a) Compléter l'arbre pondéré ci-contre avec les probabilités correspondantes.
   (b) Quelle est la probabilité d'obtenir deux pairs ?
   (c) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un pair ?
   (d) Quelle est la probabilité d'obtenir au plus un impair ?
   (e) Quelle est la probabilité d'obtenir une somme paire ?



Exercice 10.9. Une usine produit des droïdes et comporte deux unités de production. Lorsqu'un droïde comporte un défaut, il est jeté.
On sait que 70 % de la production vient le l'unité A, le reste vient d'une unité B plus ancienne. En outre, on sait que 2 % des droïdes venant de l'unité A ont un défaut, alors qu'il y en a 6 % parmi ceux venant de l'unité B.
On choisit un droïde au hasard dans la production et on considère les événements :
A : « le droïde vient de l'unité A ».
B : « le droïde vient de l'unité B ».
D :« le droïde a un défaut ».

1. Quelle est la probabilité pour que le droïde vienne de l'unité B ?
2. Faire un arbre pondéré modélisant la situation de l'énoncé.
3. Déterminer la probabilité pour que le droïde vienne de l'unité A et ait un défaut.
4. Quelle est la probabilité pour le droïde soit rejeté ?

Exercice 10.10. Un coach d'une équipe de rugby distribue les ballons pour l'échauffement aux joueuses. Pour cela il dispose de plusieurs sacs de ballons : le premier contient 34 ballons dont 15 ballons verts, 12 jaunes et des blancs, le second contient 13 blancs, 7 rouges et 5 verts et le dernier contient 20 noirs et 5 rouges. Il pioche au hasard dans le premier sac.

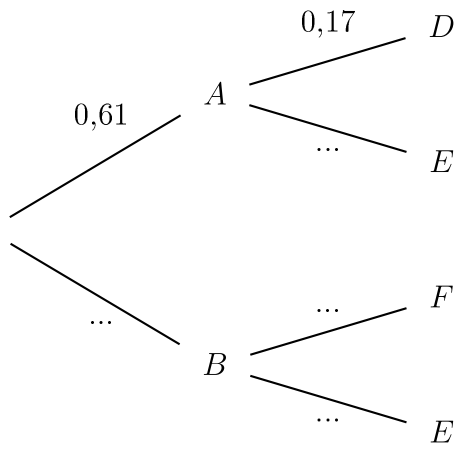
Si le coach sort un ballon vert du premier sac, il pioche en plus au hasard un ballon dans le second sac et donne les deux aux joueuses.

Si le coach sort un ballon jaune du premier sac, il pioche en plus au hasard un ballon du troisième sac.

Enfin, s'il sort un ballon blanc du premier sac, il pioche un ballon rouge.

1. Quelle est la probabilité que le coach sorte un ballon jaune du premier sac ?
2. Représenter la situation par un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité pour les joueuses d'obtenir un ballon vert puis un ballon rouge ?
4. Quelle est la probabilité pour les joueuses d'obtenir un ballon noir ?
5. Quelle est la probabilité pour les joueuses d'obtenir deux ballons verts ?
6. Quelle est la probabilité pour les joueuses d'obtenir deux ballons blancs ?
7. Quelle est la probabilité pour les joueuses d'obtenir un ballon rouge ?
8. Quelle est la probabilité pour les joueuses d'obtenir un seul ballon vert ?
9. Quelle est la probabilité pour les joueuses d'obtenir au moins un ballon blanc ?

Exercice 10.11. Soit l'arbre pondéré suivant :



1. Déterminer $\mathbb{P}(D)$
2. Sachant que $\mathbb{P}(E) = 0,7403$, compléter l'arbre avec les probabilités correspondantes.

10.6.3 Entraînement

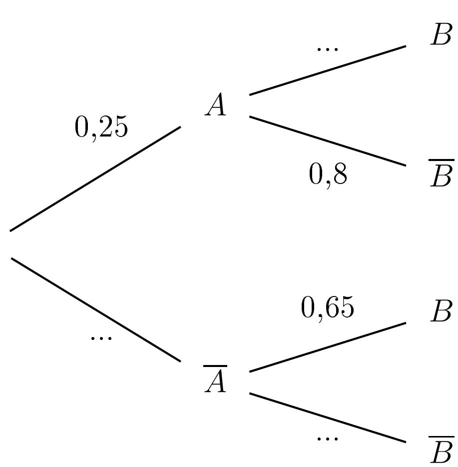
Exercice 10.12. Soient A et B deux évènements de Ω.

1. Si $\mathbb{P}(A) = 0,16$, $\mathbb{P}(B) = 0,12$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,02$, calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$.
2. $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,23$, $\mathbb{P}(B) = 0,17$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,07$, calculer $\mathbb{P}(A)$.
3. $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,8$, $\mathbb{P}(A) = 0,2$ et $\mathbb{P}(B) = 0,4$, calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.

Exercice 10.13. Calculer les probabilités $\mathbb{P}\left(\overline{A}\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{B}\right)$, $\mathbb{P}\left(\overline{A \cup B}\right)$ et $\mathbb{P}\left(\overline{A \cap B}\right)$ dans les cas suivants :

1. $\mathbb{P}(A) = 0,15$, $\mathbb{P}(B) = 0,41$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,48$.
2. $\mathbb{P}(A) = 0,49$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,27$ et $\mathbb{P}(A \cup B) = 0,68$.

Exercice 10.14. Compléter l'abre pondéré ci-dessous puis calculer $\mathbb{P}(B)$ et $\mathbb{P}(\overline{B})$.



Exercice 10.15. Une joueuse de tennis a droit à deux tentatives pour réussir sa mise en jeu. Gwladys réussit sa première balle de service dans 65% des cas. Quand elle échoue, elle réussit la seconde dans 80% des cas. Quelle est la probabilité pour qu'elle commette une double faute (c'est-à-dire qu'elle échoue deux fois de suite) ? *Indication :* on pourra modéliser la situation par un arbre.