

Variations de fonctions

1 Variations

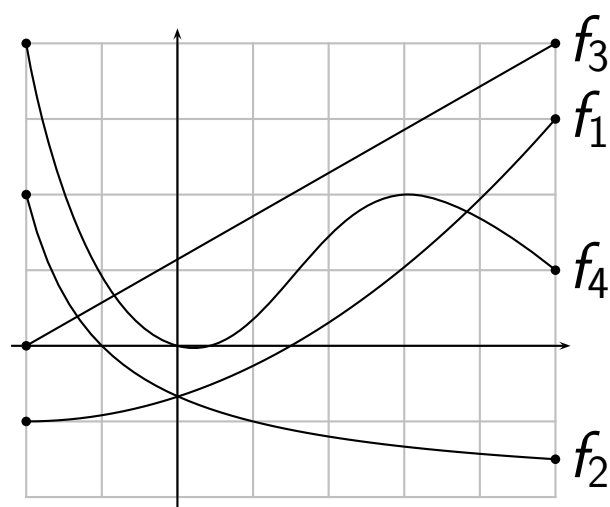
1.1 Définition

Définition 6.1. Soient f une fonction définie sur un ensemble \mathcal{D} et I un intervalle de \mathcal{D} .

- f est dite **croissante** sur I si pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.
- f est dite **décroissante** sur I si pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.
- f est dite **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I .

Remarque : on pourrait dire qu'une fonction croissante – respectivement décroissante – est une fonction qui « monte » – respectivement « descend » lorsque l'on va de la gauche vers la droite.

Exemples graphiques :



- f_1 est croissante sur $[-2, 5]$;
- f_2 est décroissante sur $[-2, 5]$;
- f_3 est croissante sur $[-2, 5]$;
- f_4 est ni croissante, ni décroissante sur $[-2, 5]$.

Exemples de comparaison d'images :

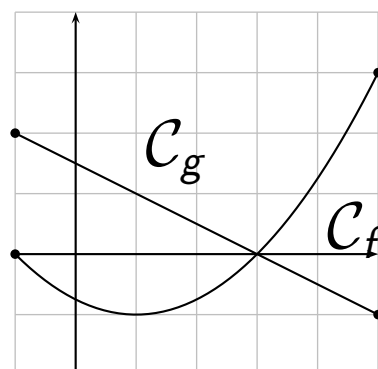
1. Soit f une fonction croissante sur $[4, 10]$.
Comparons $f(5)$ et $f(8)$, comme $5 \leq 8$
et f croissante, on a $f(5) \leq f(8)$.
2. Soit g une fonction décroissante sur $[-1, +\infty[$.
Comparons $g(0)$ et $g(100)$,
comme $0 \leq 100$ et g décroissante, on
a $g(0) \geq g(100)$.

1.2 Tableau de variation

Les variations d'une fonction f peuvent être synthétisées à l'aide d'un tableau dit tableau de variations. Celui est composé de deux lignes : la première contient les bornes des intervalles sur lesquels f est monotone ; la seconde contient des flèches représentant les variations de f (montantes si f croissante, descendantes si f décroissante).

Exemples :

On considère les fonctions f et g représentées par les courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g ci-contre. La fonction g est clairement décroissante sur $[-1, 5]$ tandis que la fonction f est décroissante sur $[-1, 1]$ puis croissante sur $[1, 5]$. On trouve les tableaux de variations qui y sont associés ci-dessous.



x	-1	1	5
$f(x)$	2	-1	3

x	-1	5
$g(x)$	2	-1

★ Vidéo.

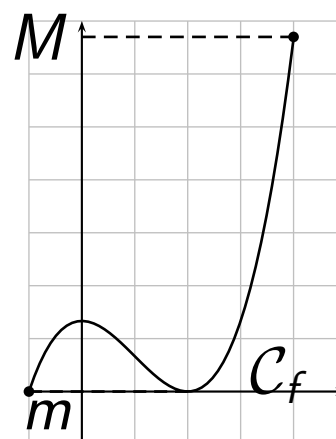
2 Extremums d'une fonction

Définition 6.2. Soit f une fonction définie sur un ensemble D et I un intervalle de \mathcal{D} .

- On dit que M est un **maximum** de f sur I s'il existe $x_M \in I$ tel que $f(x_M) = M$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.
- On dit que m est un **minimum** de f sur I s'il existe $x_m \in I$ tel que $f(x_m) = m$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \geq m$.

Exemples :

On considère la fonction f et g représentée par la courbe C_f ci-contre. On peut voir graphiquement que f admet un maximum : 6,7 atteint en 4 ; et un minimum : 0 atteint en -1 et 2.



Exemples : Soit une fonction f définie sur $[-1, 5]$ ayant pour tableau de variations celui ci-dessous.

x	-1	1	5
$f(x)$	2	-1	3

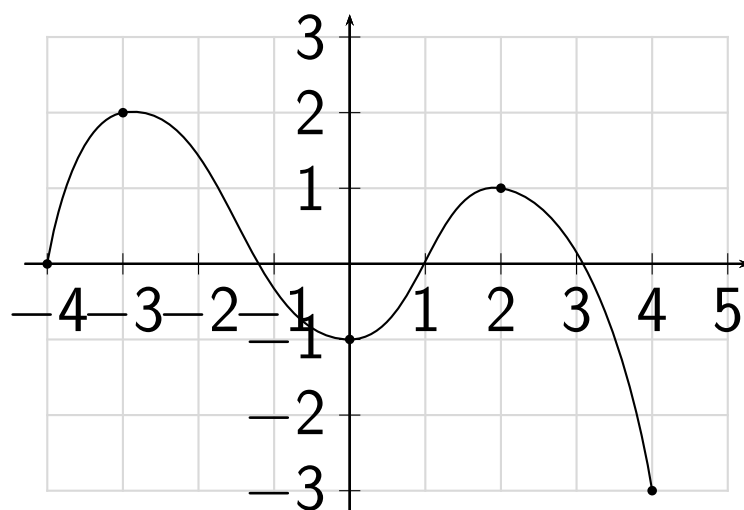
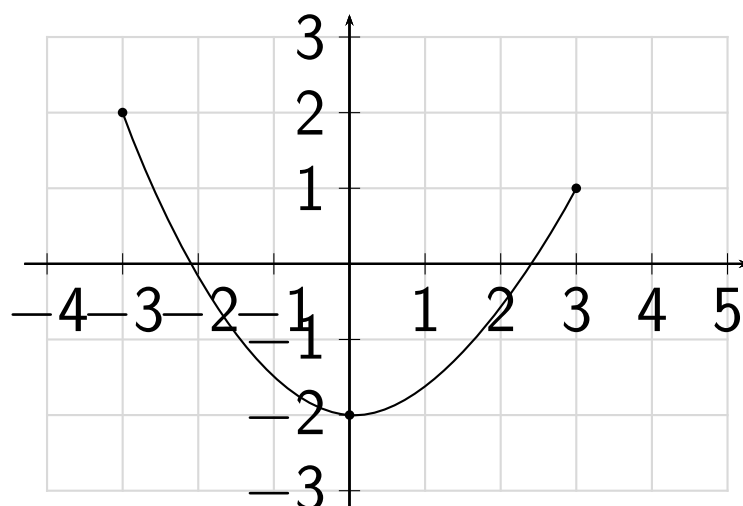
f admet pour maximum 3 atteint en 5 et pour minimum -1 atteint en 1.

3 Attendus et savoir-faire

- Décrire les variations d'une fonction à partir d'une situation (tableau, courbe, problème...).
- Faire le tableau de variations d'une fonction à partir de sa courbe.
- Dessiner une courbe possible d'une fonction à partir de son tableau de variations.
- Comparer deux images d'une fonction.
- Trouver les minimum et maximum d'une fonction à partir de sa courbe ou de son tableau de variations.
- Montrer qu'un nombre n'est pas le minimum ou le maximum d'une fonction en exhibant un contre-exemple.

4 Exercices

Exercice 6.1. Soient deux fonction représentées ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions puis donner leur tableau de variation.



Exercice 6.2.

Tracer une courbe correspondant au tableau de variation ci-contre.

x	-4	-2	1
$f(x)$	2	3	-2

Exercice 6.3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0; 4]$ telle que :

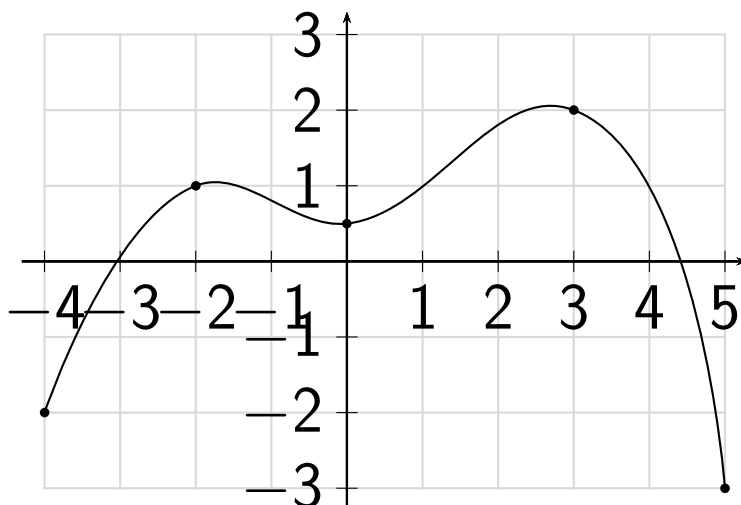
- f est croissante sur l'intervalle $[0; 2]$.
- f est décroissante sur l'intervalle $[2; 4]$.
- $f(0) = f(4) = 5$; $f(2) = 10$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 4]$. Tracer une courbe pouvant représenter cette fonction.

Exercice 6.4. Tracer une courbe correspondant au tableau de variation ci-dessous.

x	-4	-2	1	3	5
$f(x)$	2	-3	-2	-4	0

Exercice 6.5. Soit f une fonction définie sur $[-4; 5]$.



Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse. Justifier. Sur $[-4; 5]$:

1. le maximum de f est $(3; 2)$.
2. le maximum de f est 3.
3. le maximum de f est 2, atteint en 3.
4. le minimum de f est 5.
5. f atteint son minimum en 0.
6. le minimum de f est -3 .

Exercice 6.6. Décrire par des phrases les variations de f dont on a le tableau de variation ci-dessous.

x	-5	-1	0	4
$f(x)$	0	-3	-2	0

Exercice 6.7. Pour chacun de ces tableaux, dire s'il peut être ou non le tableau de variation correct d'une fonction.

x	-2	1	10
$f(x)$	0	-1	-5

x	-5	10	1
$h(x)$	5	10	-5

x	-4	-1	9
$g(x)$	1	-3	5

Exercice 6.8. Soit f une fonction définie sur $[-2; 4]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-2	0	2	4
$f(x)$	3	-1	2	1

- Tracer une possible courbe représentative de f .
- Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier si faux.
 - 3 est le maximum de f sur $[0; 4]$.
 - 0 est le minimum de f sur $[-2; 2]$.
 - f est décroissante sur $[2, 5; 3]$.
 - le maximum de f est 4.
- Comparer $f(0, 5)$ et $f(1)$, justifier.
- Comparer $f(-2)$ et $f(3)$, justifier.

Exercice 6.9. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f .

x	-6	-4	-1	0	2	5	6	8
$f(x)$	-3	2	1	5	-1	3	-5	-3

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de -1 par f ?
3. Déterminer le maximum de f sur son ensemble de définition.
4. Décrire les variations de f sur $[-4; 0]$.
5. Compléter :
 - Lorsque $x \in [-6; -1]$ $\leq f(x) \leq$
 -
 - Lorsque $x \in [0; 8]$ $\leq f(x) \leq$
6. Comparer $f(3)$ et $f(4)$. Justifier.
7. Comparer $f(-2)$ et $f(-3)$. Justifier.
8. Comparer $f(-5)$ et $f(7)$. Justifier.
9. Sachant que la fonction ne fait aucun saut, déterminer les intervalles dans lesquels se situent les solutions de $f(x) = 0$.
10. Tracer une courbe qui peut représenter la fonction f .