Chapitre 6

Variations et extremums de fonctions

6.1 Variations

6.1.1 Définition

Définition 6.1. *Soient f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ et I un intervalle de $\mathcal{D}$.*

— *f est dite **croissante** sur I si pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$.*

— *f est dite **décroissante** sur I si pour tous $x, y \in I$ tels que $x \leq y$, on a $f(x) \geq f(y)$.*

— *f est dite **monotone** sur I si elle est croissante ou décroissante sur I.*

Remarque : on pourrait dire qu'une fonction croissante – respectivement décroissante – est une fonction qui « monte » – respectivement « descend » lorsque l'on va de la gauche vers la droite.

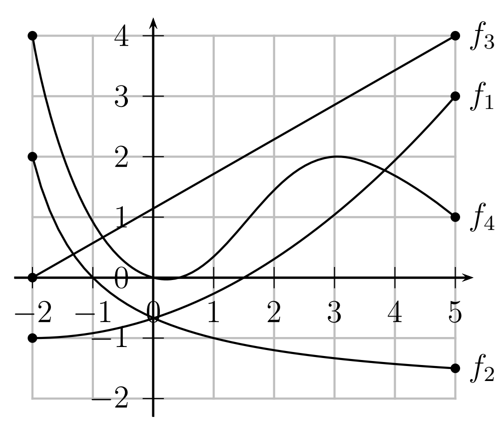
Exemples graphiques :

— f_1 est croissante sur $[-2, 5]$;

— f_2 est décroissante sur $[-2, 5]$;

— f_3 est croissante sur $[-2, 5]$;

— f_4 est ni croissante, ni décroissante sur $[-2, 5]$.



Exemples de comparaison d'images :

1. Soit f une fonction croissante sur $[4, 10]$. Comparons $f(5)$ et $f(8)$, comme $5 \leq 8$ et f croissante, on a $f(5) \leq f(8)$.

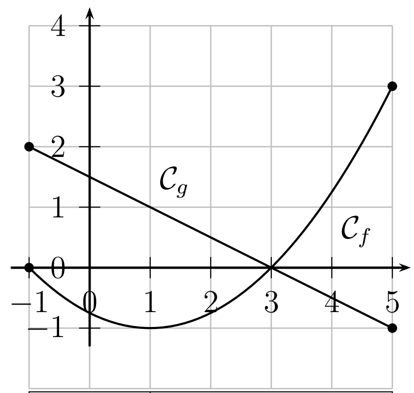
2. Soit g une fonction décroissante sur $[-1, +\infty[$. Comparons $g(0)$ et $g(100)$, comme $0 \leq 100$ et g décroissante, on a $g(0) \geq g(100)$.

6.1.2 Tableau de variation

Les variations d'une fonction f peuvent être synthétisées à l'aide d'un tableau dit **tableau de variations**. Celui est composé de deux lignes : la première contient les bornes des intervalles sur lesquels f est monotone ; la seconde contient des flèches représentant les variations de f (montantes si f croissante, descendantes si f décroissante).

Exemples :

On considère les fonctions f et g représentées par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ci-contres. La fonction g est clairement décroissante sur $[-1, 5]$ tandis que la fonction f est décroissante sur $[-1, 1]$ puis croissante sur $[1, 5]$. On trouve les tableaux de variations qui y sont associés ci-dessous.



x	-1		1		5
$f(x)$	2	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3

x	-1		5
$g(x)$	2	$\searrow$	-1

★ Vidéo.

6.2 Extremums d'une fonction

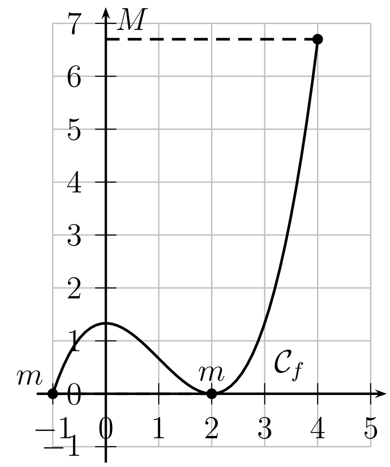
Définition 6.2. *Soit f une fonction définie sur un ensemble D et I un intervalle de $\mathcal{D}$.*

— *On dit que M est un **maximum** de f sur I s'il existe $x_M \in I$ tel que $f(x_M) = M$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \leq M$.*

— *On dit que m est un **minimum** de f sur I s'il existe $x_m \in I$ tel que $f(x_m) = m$ et pour tout $x \in I$, $f(x) \leq m$.*

Exemples :

On considère la fonction f et g représentée par la courbe $\mathcal{C}_f$ ci-contre. On peut voir graphiquement que f admet un maximum : $6,7$ atteint en 4 ; et un minimum : 0 atteint en -1 et 2.



Exemples : Soit une fonction f définie sur $[-1\,;5]$ ayant pour tableau de variations celui ci-dessous.

x	-1	1	5
$f(x)$	2 ↘	-1	↗ 3

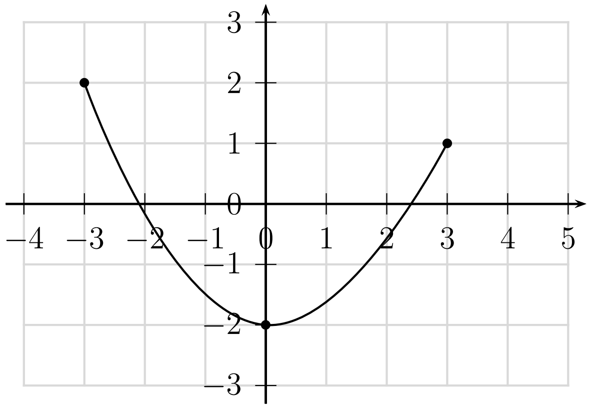
f admet pour maximum 3 atteint en 5 et pour minimum -1 atteint en 1.

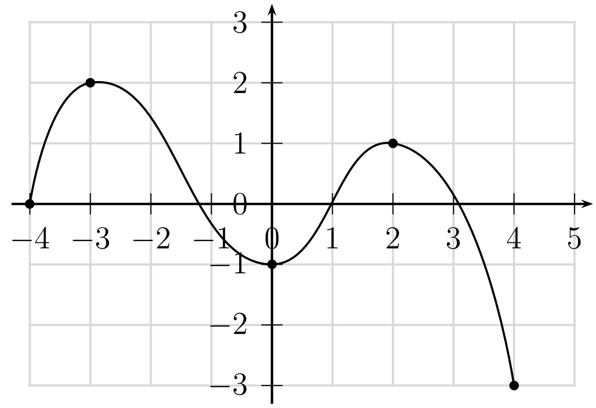
6.3 Attendus et savoir-faire

- Décrire les variations d'une fonction à partir d'une situation (tableau, courbe, problème...).
- Faire le tableau de variations d'une fonction à partir de sa courbe.
- Dessiner une courbe possible d'une fonction à partir de son tableau de variations.
- Comparer deux images d'une fonction.
- Trouver les minimum et maximum d'une fonction à partir de sa courbe ou de son tableau de variations.
- Montrer qu'un nombre n'est pas le minimum ou le maximum d'une fonction en exhibant un contre-exemple.

6.4 Exercices

Exercice 6.1. Soient deux fonction représentées ci-dessous. Déterminer l'ensemble de définition de ces deux fonctions puis donner leur tableau de variation.





Exercice 6.2.

Tracer une courbe correspondant au tableau de variation ci-contre.

x	-4		-2		1
$f(x)$			3		
	2	$\nearrow$		$\searrow$	-2

Exercice 6.3. Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\,;4]$ telle que :

— f est croissante sur l'intervalle $[0\,;2]$.

— f est décroissante sur l'intervalle $[2\,;4]$.

— $f(0) = f(4) = 5\,;\ f(2) = 10$.

Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0;4]$. Tracer une courbe pouvant représenter cette fonction.

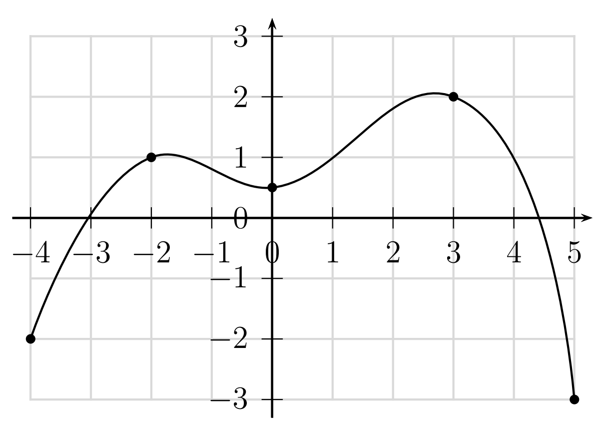
Exercice 6.4.

Tracer une courbe correspondant au tableau de variation ci-contre.

x	-4		-2		1		3		5
$f(x)$	2				-2				0
		$\searrow$	-3	$\nearrow$		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

Exercice 6.5. Soit f une fonction définie sur $[-4\,;5]$.
Pour chaque affirmation dire si elle est vraie ou fausse. Justifier. Sur $[-4;5]$:

1. le maximum de f est $(3\,;2)$.
2. le maximum de f est 3.
3. le maximum de f est 2, atteint en 3.
4. le minimum de f est 5.
5. f atteint son minimum en 0.
6. le minimum de f est -3.



Exercice 6.6.

Décrire par des phrases les variations de f dont on a le tableau de variation ci-contre.

x	-5		-1		0		4
$f(x)$	0	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-2	$\rightarrow$	0

Exercice 6.7. Pour chacun de ces tableaux, dire s'il peut être ou non le tableau de variation correct d'une fonction.

x	-2		1		10
$f(x)$	0	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-5

x	-4		-1		9
$g(x)$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$	5

x	-5		10		1
$h(x)$	5	$\nearrow$	10	$\searrow$	-5

Exercice 6.8. Soit f une fonction définie sur $[-2\,;4]$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	-2		0		2		4
$f(x)$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

1. Tracer une possible courbe représentative de f.
2. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier si faux.

   (a) 3 est le maximum de f sur $[0\,;4]$.

   (b) 0 est le minimum de f sur $[-2\,;2]$.

   (c) f est décroissante sur $[2,5\,;3]$.

   (d) le maximum de f est 4.

3. Comparer $f(0,5)$ et $f(1)$, justifier.
4. Comparer $f(-2)$ et $f(3)$, justifier.

Exercice 6.9. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-6		-4		-1		0		2		5		6		8
$f(x)$	-3	$\nearrow$	2	$\searrow$	1	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3	$\searrow$	-5	$\nearrow$	-3

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Quelle est l'image de -1 par f ?
3. Déterminer le maximum de f sur son ensemble de définition.
4. Décrire les variations de f sur $[-4\,;0]$.
5. Compléter :
   — Lorsque $x \in [-6\,;-1]$ ...... $\leq f(x) \leq$ .....
   — Lorsque $x \in [0\,;8]$ ...... $\leq f(x) \leq$ .....

6. Comparer $f(3)$ et $f(4)$. Justifier.
7. Comparer $f(-2)$ et $f(-3)$. Justifier.
8. Comparer $f(-5)$ et $f(7)$. Justifier.
9. Sachant que la fonction ne fait aucun saut, déterminer les intervalles dans lesquels se situent les solutions de $f(x) = 0$.
10. Tracer une courbe qui peut représenter la fonction f.