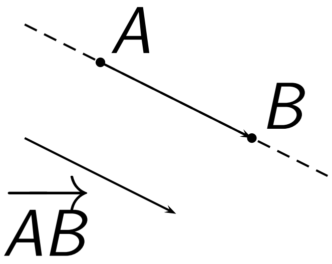
Vecteurs

1 Définition

Définition 7.1. *Soient A et B deux points du plan. À la* ***translation*** *qui transforme A en B, on associe le* ***vecteur*** $\overrightarrow{AB}$ *. Il est caractérisé par*

- *sa* ***direction*** *: la droite (AB) ;*
- *son* ***sens*** *: de A vers B ;*
- *sa* ***norme*** *: la longueur du segment $[AB]$.*

*A est l'***origine*** *du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et B son* ***extrémité****.*

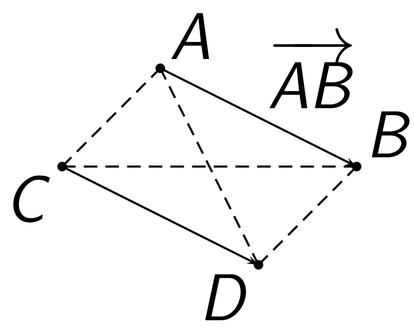


Cas particulier : le vecteur nul noté $\vec{0}$ est le vecteur de longueur nul, il n'a pas de direction ni de sens à proprement parler. Par ailleurs, pour tout point M, on a $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Définition 7.2. *Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.*

Propriété 7.1. *Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Les quatre affirmations ci-dessous sont équivalentes :*

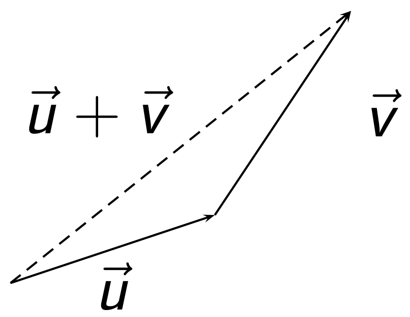
1. *Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux .*
2. *D est l'image de C par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.*
3. *$[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu .*
4. *$ABDC$ est un parallélogramme .*



★ **Vidéo 1 (translation) ;**
vidéo 2 (construire avec un vecteur).

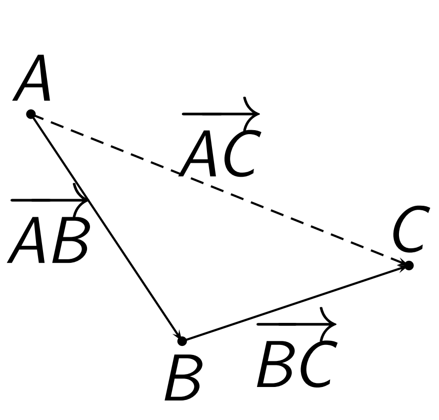
2 Somme de vecteurs

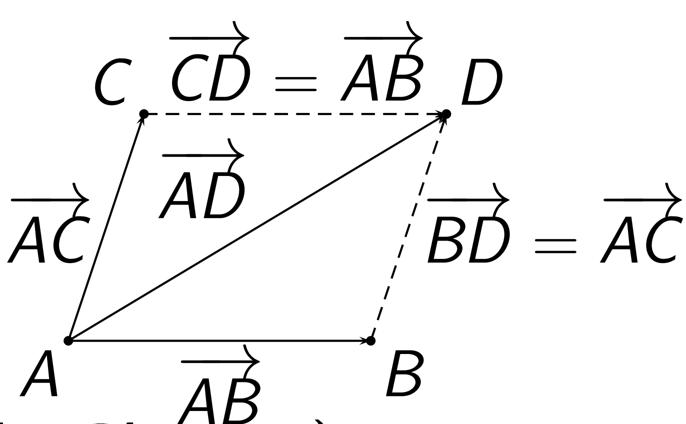
Propriété 7.2. *Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan. On note $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ les translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. L'application successive des translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.*



Propriété 7.3. *Soient A, B et C trois points du plan. On a alors :*

1. *$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (relation de Chasles).*
2. *$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$ où D est l'unique point du plan tel que $ABDC$ soit un parallélogramme (règle du parallélogramme).*

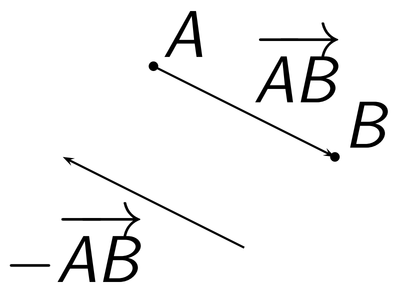




★ **Vidéo 1 (relation de Chasles) ; vidéo 2 (règle du parallélogramme).**

3 Opposé d'un vecteur

Définition 7.3. *L'**opposé d'un vecteur** $\vec{u}$ est l'unique vecteur $\vec{v}$ tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$: il s'agit de $-\vec{u}$. Ce vecteur a les mêmes directions et normes que $\vec{u}$ mais est de sens opposé. En particulier, si A et B sont deux points du plan, l'opposé de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA}$.*



4 Coordonnées d'un vecteur

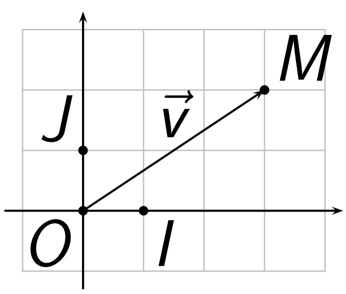
Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère $(O\,;I\,;J)$.

4.1 Coordonnées d'un vecteur

Définition 7.4. *Soient $\vec{v}$ un vecteur et $M(x\,;y)$ l'image de O par la translation de vecteur $\vec{u}$. On appelle coordonnées de $\vec{v}$ dans le repère $(O\,;I\,;J)$ les coordonnées de M dans ce même repère et on note*

$$\vec{v}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemple :



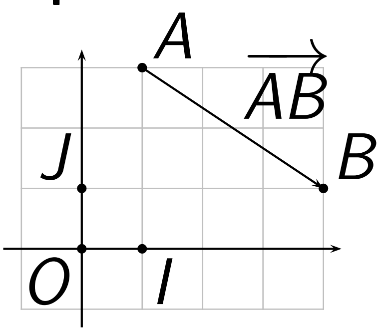
Le point M a pour coordonnées $(3\,;2)$ dans le repère $(O;I;J)$, donc on a

$$\vec{v}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 7.4. *Soient $A(x_A\,;y_A)$ et $B(x_B\,;y_B)$ deux points du plan, alors :*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Exemple :



On a $A\,(1\,;3)$ **et** $B\,(4\,;1)$ **donc**

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 7.5. *Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.*
Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont égaux si et seulement leurs coordonnées sont égales :

$$\vec{u} = \vec{v} \iff x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 = y_2.$$

Application : Soient $A\,(1\,;2)$, $B\,(1\,;-3)$ et $C\,(-3\,;5)$. Trouvons les coordonnées de D telles que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1-1 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. On note $D\,(x\,;y)$, on a alors $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-5 \end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, on a $x+3=0$ et $y-5=-5$, on en déduit que $x=-3$ et $y=0$ donc $D\,(-3\,;0)$.

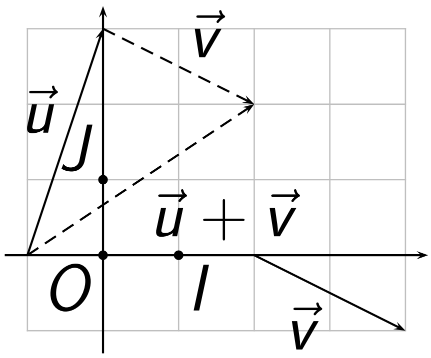
★ Vidéo 1 ; vidéo 2 ; vidéo 3.

4.2 Coordonnées d'une somme de vecteurs

Propriété 7.6. *Soient deux vecteurs* $\vec{u}\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ *et* $\vec{v}\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$.

On a $[\vec{u}+\vec{v}]\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ y_1+y_2 \end{pmatrix}$.

Exemple :



On a $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$ donc

$$[\vec{u}+\vec{v}]\begin{pmatrix}1+2\\3-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

4.3 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Définition 7.5. *Soient k un nombre réel et $\vec{v}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ un vecteur. On note $[k\vec{v}]$ le vecteur de coordonnées $[k\vec{v}]\begin{pmatrix}kx\\ky\end{pmatrix}$.*

Exemples :

1. Pour $\vec{v}\begin{pmatrix}-2\\6\end{pmatrix}$ et $k=3$, on a $[k\vec{v}]\begin{pmatrix}-6\\18\end{pmatrix}$.
2. Pour $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\-3\end{pmatrix}$ et $k=-5$, on a $[k\vec{v}]\begin{pmatrix}0\\15\end{pmatrix}$.

★ Vidéo.

5 Attendus et savoir-faire

- Connaître et utiliser le lien entre parallélogramme et vecteurs.
- Connaître et utiliser la relation de Chasles et la règle parallélogramme.
- Construire une somme de vecteurs, l'opposé d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur, d'une somme de vecteur.

6 Exercices

6.1 Démarrage

Exercice 7.1. Soient $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de ses diagonales et M et N milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

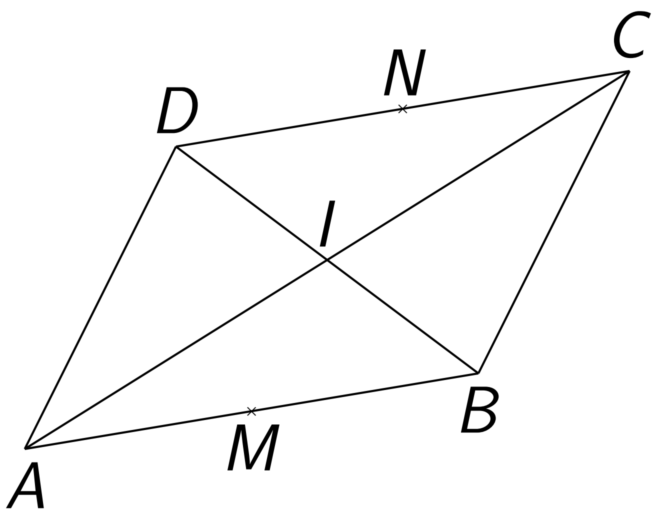
1. Citer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AM}$.
2. Recopier et compléter les égalités suivantes :

   a) $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{I\ldots}$

   b) $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{N\ldots}$

   c) $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{D\ldots}$

   d) $\overrightarrow{ID} = \overrightarrow{B\ldots}$



Exercice 7.2. En reprenant la configuration de l'exercice précédent, donner les vecteurs auxquels sont égales les sommes suivantes :

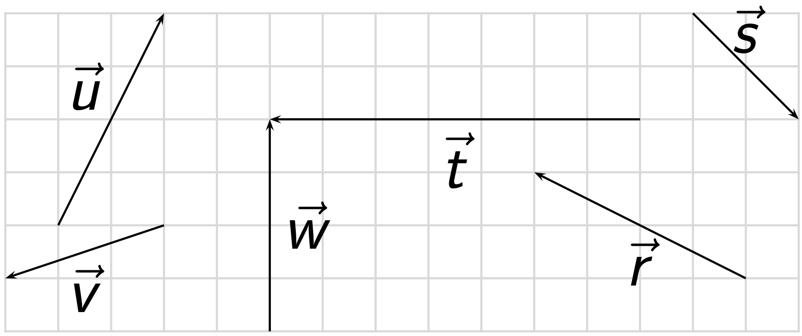
1. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$;
2. $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}$;
3. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}$;
4. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{AD}$;
5. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

Exercice 7.3. Construire dans chacun des cas ci-dessous le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.

Exercice 7.4. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. $A\,(2\,;4)$ et $B\,(0\,;8)$.
2. $A\,(-1\,;3)$ et $B\,(9\,;3)$.
3. $A\,(-2\,;-4)$ et $B\,(-7\,;1)$.

Exercice 7.5. Lire les coordonnées des vecteurs ci-dessous.



Exercice 7.6. Soient $A\,(2\,;4)$, $B\,(-2\,;2)$, $C\,(4\,;-2)$ et $D\,(8\,;0)$ quatre points du plan. Montrer que $ADCB$ est un parallélogramme.

Exercice 7.7. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

1. $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u}\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.8. Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées du vecteurs :

1. $2\vec{u} - \vec{v}$;
2. $-3\vec{u} + 4\vec{v}$;
3. $\vec{u} + \dfrac{1}{4}\vec{v}$.

6.2 Approfondissement

Exercice 7.9. Soient $ABCD$ un carré, E, F, G, H les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et I le milieu des diagonales de $ABCD$. Déterminer à quel vecteur sont égales les sommes suivantes :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$;
2. $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{IB}$;
3. $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{HD}$;
4. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HD}$;
5. $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$.

Exercice 7.10. Soient $E\,(-5\,;7)$, $F\,(6\,;-2)$, $G\,(11\,;0)$ et $H\,(-10\,;5)$ quatre points du plan. Forment-ils un parallélogramme ?

Exercice 7.11. Soient $A\,(3\,;0)$, $B\,(4\,;-2)$, $C\,(0\,;-5)$ et $D\,(x\,;y)$ quatre points du plan. Trouver les coordonnées de D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exercice 7.12. Soient $A\,(-3\,;1)$, $B\,(2\,;-3)$ et $C\,(0\,;1)$ trois points du plan. Calculer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$?

Exercice 7.13. Soient $A\,(2\,;-1)$, $B\,(3\,;7)$, $C\,(-5\,;1)$ et $U\,(11\,;13)$ quatre points du plan.

1. Calculer les coordonnées du point V défini par $\overrightarrow{BV} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que $CUAV$ est un parallélogramme.

Exercice 7.14. Soient A, B et C trois points du plan. Montrer que pour tout point M, on a

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

Indication : utiliser la relation de Chasles.

6.3 Entraînement

Exercice 7.15. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1. $A\,(1\,;7)$ et $B\,(-6\,;4)$.
2. $A\,(-3\,;8)$ et $B\,(7\,;2)$.
3. $A\,(1\,;-5)$ et $B\,(9\,;0)$.

Exercice 7.16. Soient $A\,(0\,;0)$, $B\,(5\,;3)$, $C\,(6\,;5)$ et $D\,(1\,;2)$ quatre points du plan. Montrer que $ADCB$ est un parallélogramme.

Exercice 7.17. Soient $A\,(-1\,;3)$, $B\,(-2\,;6)$, $C\,(3\,;0)$ et $D\,(x\,;y)$ quatre points du plan. Trouver les coordonnées de D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exercice 7.18. Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées du vecteurs :

1. $\vec{u} - 2\vec{v}$;
2. $-\vec{u} + 4\vec{v}$;
3. $\dfrac{1}{4}\vec{u} + \dfrac{1}{3}\vec{v}$.

Exercice 7.19. Soient $A\,(-3\,;3)$, $B\,(1\,;5)$ et $D\,(1\,;1)$ trois points du plan.

1. Calculer les coordonnées du point P défini par $\overrightarrow{DP} = -\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que $AMPB$ est un parallélogramme.