

Chapitre 7

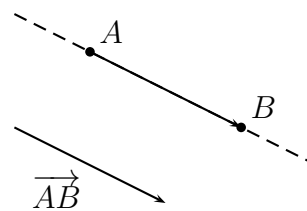
Vecteurs

7.1 Définition

Définition 7.1. Soient A et B deux points du plan. À la **translation** qui transforme A en B , on associe le **vecteur** \overrightarrow{AB} . Il est caractérisé par

- sa **direction** : la droite (AB) ;
- son **sens** : de A vers B ;
- sa **norme** : la longueur du segment $[AB]$.

A est l'**origine** du vecteur \overrightarrow{AB} et B son **extrémité**.

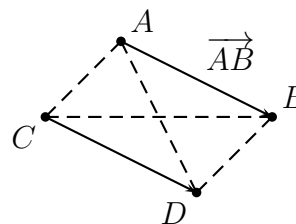


Cas particulier : le **vecteur nul** noté $\vec{0}$ est le vecteur de longueur nul, il n'a pas de direction ni de sens à proprement parler. Par ailleurs, pour tout point M , on a $\overrightarrow{MM} = \vec{0}$.

Définition 7.2. Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.

Propriété 7.1. Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Les quatre affirmations ci-dessous sont équivalentes :

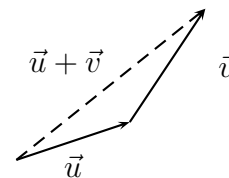
1. Les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{CD} sont égaux.
2. D est l'image de C par la translation de vecteur \overrightarrow{AB} .
3. $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.
4. $ABDC$ est un parallélogramme.



★ Vidéo 1 (translation) ; vidéo 2 (construire un point à l'aide d'un vecteur).

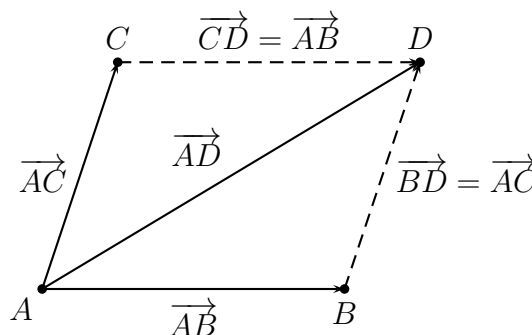
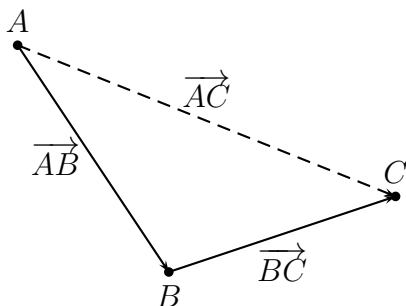
7.2 Somme de vecteurs

Propriété 7.2. Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs du plan. On note $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ les translations de vecteurs respectifs \vec{u} et \vec{v} . L'application successive des translations $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ est une translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.



Propriété 7.3. Soient A, B et C trois points du plan. On a alors :

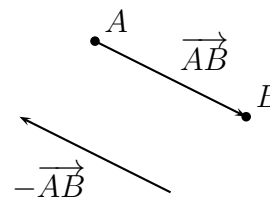
1. $\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$ (relation de Chasles).
2. $\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$ où D est l'unique point du plan tel que $ABDC$ soit un parallélogramme (règle du parallélogramme).



★ Vidéo 1 (relation de Chasles); vidéo 2 (règle du parallélogramme).

7.3 Opposé d'un vecteur

Définition 7.3. L'opposé d'un vecteur \vec{u} est l'unique vecteur \vec{v} tel que $\vec{u} + \vec{v} = \vec{0}$: il s'agit de $-\vec{u}$. Ce vecteur a les mêmes directions et normes que \vec{u} mais est de sens opposé. En particulier, si A et B sont deux points du plan, l'opposé de \vec{AB} est \vec{BA} .



7.4 Coordonnées d'un vecteur

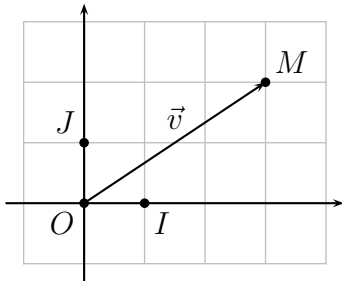
Dans toute cette partie, le plan est muni d'un repère $(O; I; J)$.

7.4.1 Coordonnées d'un vecteur

Définition 7.4. Soient \vec{v} un vecteur et $M(x; y)$ l'image de O par la translation de vecteur \vec{v} . On appelle coordonnées de \vec{v} dans le repère $(O; I; J)$ les coordonnées de M dans ce même repère et on note

$$\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Exemple :



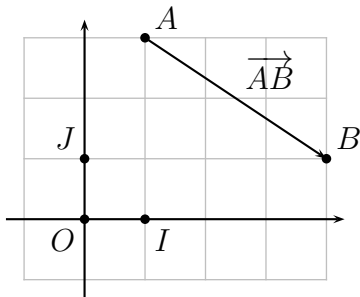
Le point M a pour coordonnées $(3; 2)$ dans le repère $(O; I; J)$, donc on a

$$\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 7.4. Soient $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ deux points du plan, alors :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}.$$

Exemple :



On a $A(1; 3)$ et $B(4; 1)$ donc

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 4 - 1 \\ 1 - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Propriété 7.5. Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. Les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont égaux si et seulement leurs coordonnées sont égales :

$$\vec{u} = \vec{v} \iff x_1 = x_2 \quad \text{et} \quad y_1 = y_2.$$

Application : Soient $A(1; 2)$, $B(1; -3)$ et $C(-3; 5)$. Trouvons les coordonnées de D telles que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

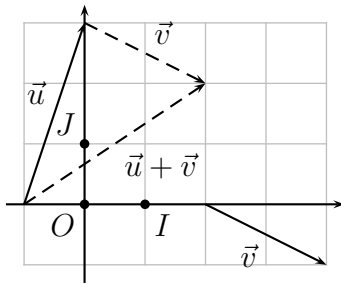
On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1-1 \\ -3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$. On note $D(x; y)$, on a alors $\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} x+3 \\ y-5 \end{pmatrix}$. Comme $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$, on a $x+3=0$ et $y-5=-5$, on en déduit que $x=-3$ et $y=0$ donc $D(-3; 0)$.

★ Vidéo 1; vidéo 2; vidéo 3.

7.4.2 Coordonnées d'une somme de vecteurs

Propriété 7.6. Soient deux vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$. On a $[\vec{u} + \vec{v}] \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$.

Exemple :



On a $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ donc

$$[\vec{u} + \vec{v}] \begin{pmatrix} 1+2 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

7.4.3 Coordonnées du produit d'un vecteur par un réel

Définition 7.5. Soient k un nombre réel et $\vec{v} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ un vecteur. On note $[k\vec{v}]$ le vecteur de coordonnées $[k\vec{v}] \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

Exemples :

1. Pour $\vec{v} \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ et $k=3$, on a $[k\vec{v}] \begin{pmatrix} -6 \\ 18 \end{pmatrix}$.
2. Pour $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $k=-5$, on a $[k\vec{v}] \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \end{pmatrix}$.

★ Vidéo.

7.5 Attendus et savoir-faire

- Connaître et utiliser le lien entre parallélogramme et vecteurs.
- Connaître et utiliser la relation de Chasles et la règle parallélogramme.
- Construire une somme de vecteurs, l'opposé d'un vecteur.
- Calculer les coordonnées d'un vecteur, d'une somme de vecteur.

7.6 Exercices

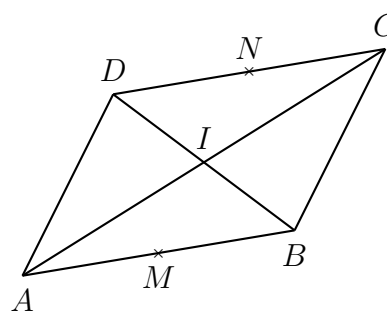
7.6.1 Démarrage

Exercice 7.1.

Soient $ABCD$ un parallélogramme, I le milieu de ses diagonales et M et N milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. Citer deux vecteurs égaux à \overrightarrow{AM} .
2. Recopier et compléter les égalités suivantes :

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{I\dots} & \text{(c) } \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{D\dots} \\ \text{(b) } \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{N\dots} & \text{(d) } \overrightarrow{ID} = \overrightarrow{B\dots} \end{array}$$



Exercice 7.2. En reprenant la configuration de l'exercice précédent, donner les vecteurs auxquels sont égales les sommes suivantes :

1. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI}$;
2. $\overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}$;
3. $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CI}$;
4. $\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{DI} + \overrightarrow{AD}$;
5. $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$.

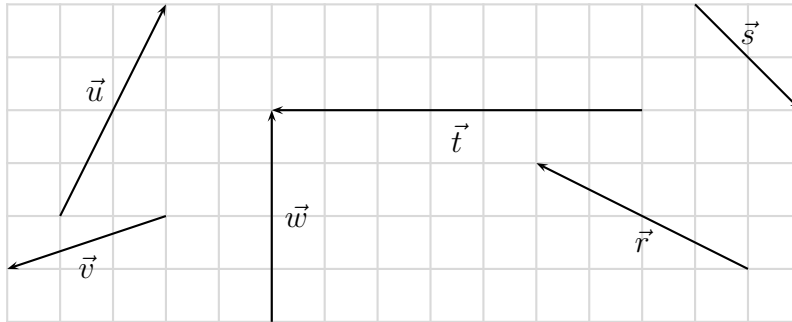
Exercice 7.3. Construire dans chacun des cas ci-dessous le point D tel que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$.



Exercice 7.4. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .

1. $A(2;4)$ et $B(0;8)$.
2. $A(-1;3)$ et $B(9;3)$.
3. $A(-2;-4)$ et $B(-7;1)$.

Exercice 7.5. Lire les coordonnées des vecteurs ci-dessous.



Exercice 7.6. Soient $A(2;4)$, $B(-2;2)$, $C(4;-2)$ et $D(8;0)$ quatre points du plan. Montrer que $ADCB$ est un parallélogramme.

Exercice 7.7. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du vecteur $\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$.

1. $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \end{pmatrix}$.
2. $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \end{pmatrix}$.
3. $\vec{u} \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Exercice 7.8. Pour $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées du vecteurs :

1. $2\vec{u} - \vec{v}$;
2. $-3\vec{u} + 4\vec{v}$;
3. $\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v}$.

7.6.2 Approfondissement

Exercice 7.9. Soient $ABCD$ un carré, E, F, G, H les milieux respectifs de $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$ et I le milieu des diagonales de $ABCD$. Déterminer à quel vecteur sont égales les sommes suivantes :

1. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI}$;
2. $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{IB}$;
3. $\overrightarrow{EI} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{HD}$;
4. $\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HD}$;
5. $\overrightarrow{DI} + \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IC}$.

Exercice 7.10. Soient $E(-5;7)$, $F(6;-2)$, $G(11;0)$ et $H(-10;5)$ quatre points du plan. Forment-ils un parallélogramme ?

Exercice 7.11. Soient $A(3;0)$, $B(4;-2)$, $C(0;-5)$ et $D(x;y)$ quatre points du plan. Trouver les coordonnées de D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exercice 7.12. Soient $A(-3;1)$, $B(2;-3)$ et $C(0;1)$ trois points du plan. Calculer les coordonnées du point M défini par $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$?

Exercice 7.13. Soient $A(2; -1)$, $B(3; 7)$, $C(-5; 1)$ et $U(11; 13)$ quatre points du plan.

1. Calculer les coordonnées du point V défini par $\overrightarrow{BV} = -\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$.
2. Montrer que $CUAV$ est un parallélogramme.

Exercice 7.14. Soient A , B et C trois points du plan. Montrer que pour tout point M , on a

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AC}.$$

Indication : utiliser la relation de Chasles.

7.6.3 Entraînement

Exercice 7.15. Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées du vecteur \overrightarrow{AB} .

1. $A(1; 7)$ et $B(-6; 4)$.
2. $A(-3; 8)$ et $B(7; 2)$.
3. $A(1; -5)$ et $B(9; 0)$.

Exercice 7.16. Soient $A(0; 0)$, $B(5; 3)$, $C(6; 5)$ et $D(1; 2)$ quatre points du plan. Montrer que $ADCB$ est un parallélogramme.

Exercice 7.17. Soient $A(-1; 3)$, $B(-2; 6)$, $C(3; 0)$ et $D(x; y)$ quatre points du plan. Trouver les coordonnées de D tel que $ABDC$ soit un parallélogramme.

Exercice 7.18. Pour $\vec{u} \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$, calculer les coordonnées du vecteurs :

1. $\vec{u} - 2\vec{v}$;
2. $-\vec{u} + 4\vec{v}$;
3. $\frac{1}{4}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}$.

Exercice 7.19. Soient $A(-3; 3)$, $B(1; 5)$ et $D(1; 1)$ trois points du plan.

1. Calculer les coordonnées du point P défini par $\overrightarrow{DP} = -\overrightarrow{DB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.
2. Montrer que $AMPB$ est un parallélogramme.