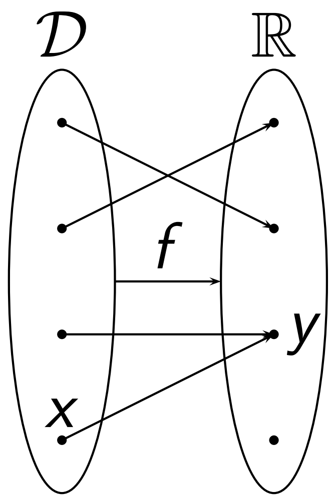
Généralités sur les fonctions

1 Fonction, image et antécédents

Définition 4.1. *Définir une* ***fonction*** f *sur un ensemble* $\mathcal{D}$ *de réels, c'est associer à chaque élément* x *de* $\mathcal{D}$ *un unique réel* y*. On écrira* $y = f(x)$ *et on note cette correspondance :*



$$\begin{aligned} f : \mathcal{D} &\to \mathbb{R}, \\ x &\mapsto f(x). \end{aligned}$$

$$\boxed{x} \longrightarrow \boxed{\text{fonction } f} \longrightarrow \boxed{y = f(x)}$$

Définition 4.2.
- $\mathcal{D}$ *est appelé l'**ensemble de définition** de* f.
- y *est appelé **image** de* x *par* f .
- *On dit que* x *est un **antécédent** de* y *par* f .

Exemple : La température dans une ville au cours d'une journée est fonction du temps. À chaque instant t est associée une unique température $\theta(t)$ (θ est la lettre grecque thêta) ; la fonction θ est définie sur $\mathcal{D} = [0\,;24]$. Les températures atteintes au cours de la journée ont plusieurs antécédents : il peut par exemple faire 10 ° C à 9h puis à 22h.

2 Modes de définition d'une fonction

2.1 Relation algébrique

Une fonction peut être définie par une relation algébrique qui donne explicitement $f(x)$ en fonction de x . Cela permet de calculer des images de façon exacte et éventuellement des antécédents.

Exemple : L'aire $\mathcal{A}$ d'un carré de côté c est donnée par $\mathcal{A}(c) = c^2$ avec $c \in \mathbb{R}_+$.

Exemple : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $p(t) = 3t^2 - 1$. Cherchons l'image de 10 par p. On a

$$p(10) = 3 \times 10^2 - 1 = 3 \times 100 - 1 = 299.$$

Exemple : On considère la fonction définie sur $[-2\,;13]$ par $g(y) = -2y + 6$. Chercher chons les éventuels antécédents de 0 par g dans $[-2\,;13]$. On a

$$-2y+6 = 0 \Longleftrightarrow -2y = -6 \Longleftrightarrow x = \frac{-6}{-2} \Longleftrightarrow x = 3.$$

Donc 0 admet pour unique antécédent 3 par g .

★ Vidéo 1 (image) ; vidéo 2 (antécédent).

2.2 Tableau de valeurs

Un tableau de valeur donne explicitement les images associées à certains antécédents .

Exemple : On a dans le tableau ci-dessous les températures d'une ville θ en fonction

de l'instant de la journée :

t	7	9	12	14	17	20	22
$\theta(t)$	8	10	13	17	19	15	10

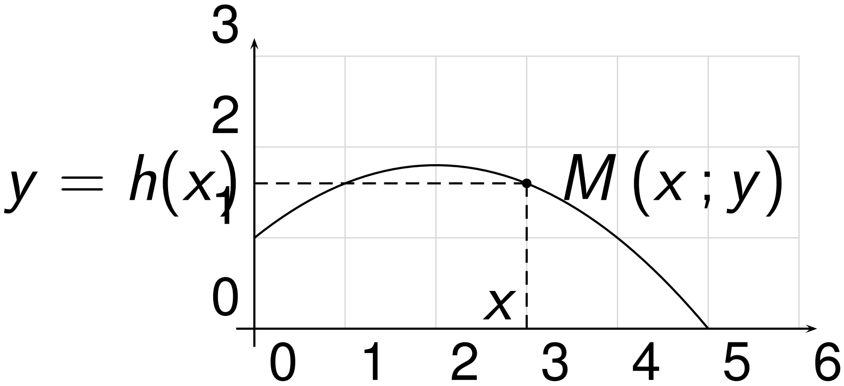
L'image de 14 par θ est 17 et 10 admet pour antécédents 9 et 22 .

2.3 Courbe représentative

Définition 4.3. *La **courbe représentative** d'une fonction f est l'ensemble des points $M\,(x\,;y)$ tels que $y = f(x)$.*

Exemple : La courbe ci-dessous représente la hauteur h en fonction du temps t de la trajectoire d'une balle lancée à un mètre de hauteur.

5 a pour image 0 et 1 admet pour antécédents 0 et 4 .



★ Vidéo.

3 Résolution graphique d'équation et d'inéquation

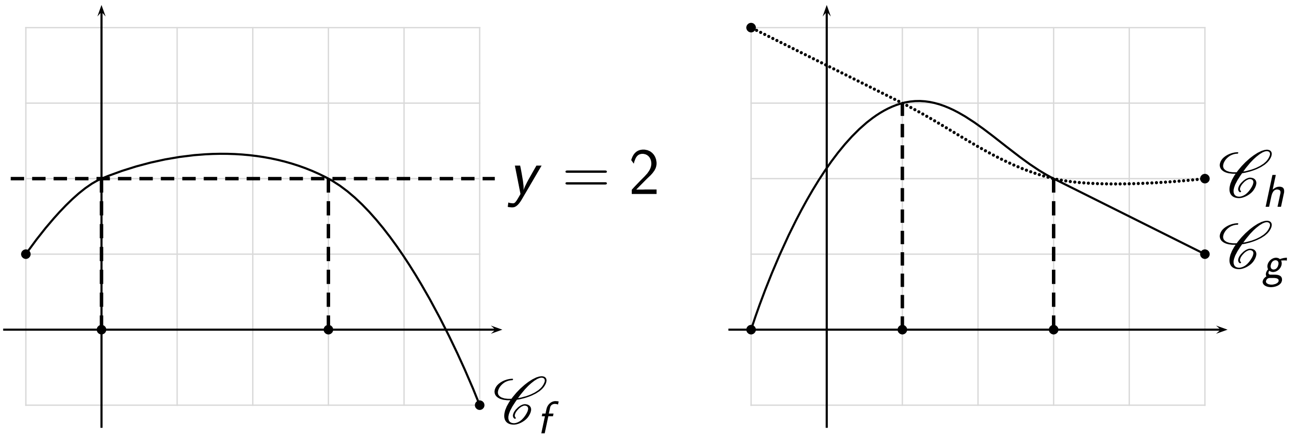
Définition 4.4. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et k une constante.*

- *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = k$ consiste à déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ ayant pour ordonnée k .*
- *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) = g(x)$ consiste à déterminer les abscisses des points d'intersection de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.*

Remarque : résoudre une équation de la forme $f(x) = k$ revient à chercher les antécédents de k par f.

Exemples :

1. **L'équation $f(x) = 2$ a pour solutions : 0 et 3 .**
2. **L'équation $g(x) = h(x)$ a pour solutions : 1 et 3**



Définition 4.5. *Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I de courbes représentatives $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ et k une constante.*

— *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \geq k$ consiste à déterminer les abscisses des points de $\mathscr{C}_f$ ayant une ordonnée supérieure à k.*

— *Résoudre graphiquement l'équation $f(x) \geq g(x)$ consiste à déterminer les abscisses des points pour lesquels $\mathscr{C}_f$ est au dessus ou confondue avec $\mathscr{C}_g$.*

Exemples : On reprend l'exemple précédent.

1. **L'inéquation $f(x) \geq 2$ a pour solutions :** $[0\,;3]$.
2. **L'inéquation $f(x) < 2$ a pour solutions :** $[-1\,;0[\cup]3\,;5]$.
3. **L'inéquation $g(x) \leq h(x)$ a pour solutions :** $[-1\,;1] \cup [3\,;5]$

4. **L'inéquation $g(x) > h(x)$ a pour solutions : $]1\,;3[$**

4 Parité

Définition 4.6. *Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$, on dit que*

— *f est **paire** lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.*

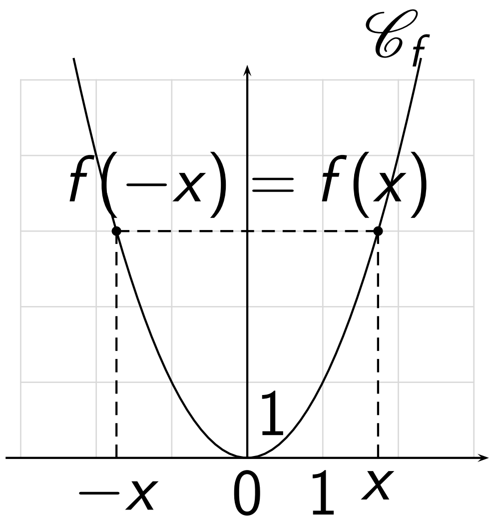
— *f est **impaire** lorsque pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.*

Propriété 4.1. *Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.*

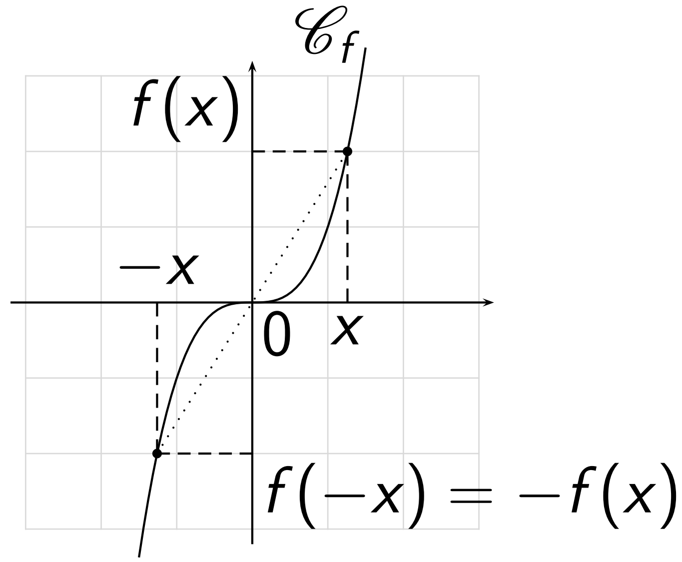
— *f est paire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

— *f est impaire si et seulement si $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'origine du repère.*

Exemples :



fonction paire



fonction impaire

5 Attendus et savoir-faire

- Lire dans ou tableau ou un graphique et calculer une image ou un antécédent d'une valeur par une fonction.
- Déterminer l'appartenance d'un point à une courbe représentative ou non.
- Résoudre graphiquement une équation ou inéquation impliquant une fonction.
- Reconnaître graphiquement si une fonction est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

6 Exercices

6.1 Démarrage

Exercice 4.1. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 5$.

1. Calculer $f(6)$ et $f(7)$.
2. Quelle est l'image de -5 par f ?
3. -5 est-il un antécédent de 2 ?
4. Déterminer un antécédent de 0.

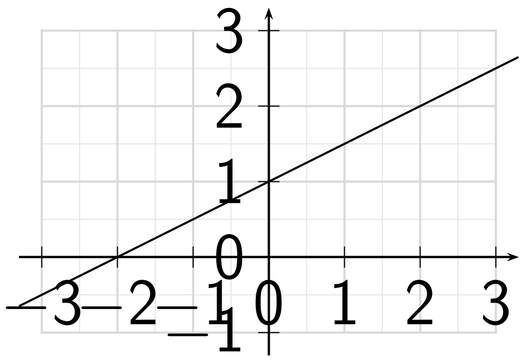
Exercice 4.2. Soit h une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

z	-3	-1	0	4	7	9	13
$h(z)$	3	1	4	5	-2	-4	-5

1. Quelles sont les images de -3 et 7.
2. Déterminer $h(-1)$ et $h(13)$.
3. Quels sont les antécédents de -2, 1 et 4 par h ?

Exercice 4.3. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-contre. Par lecture graphique, déterminer :

1. L'image de -2 par f.
2. L'image de 0 par f.
3. Les antécédents éventuels de 1.
4. Les antécédents éventuels de 2.
5. Résoudre $f(x) = 2,5$.

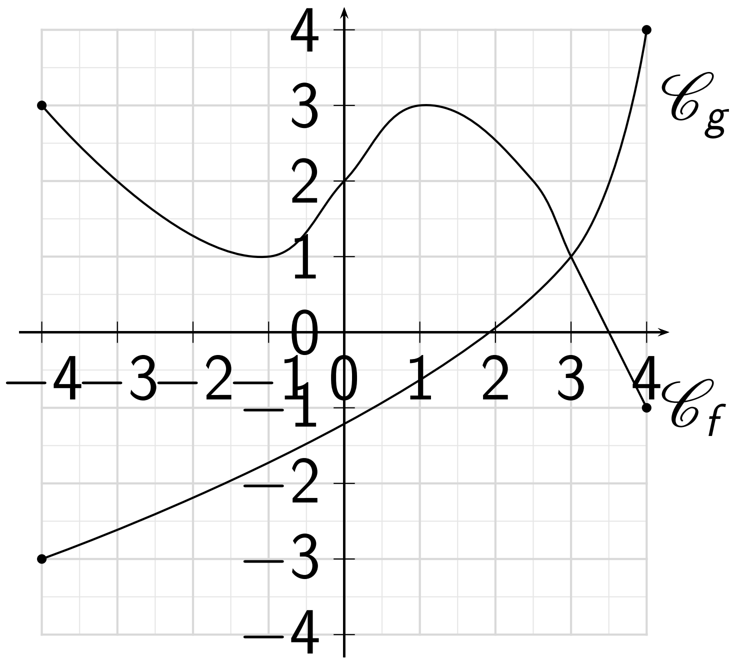


Exercice 4.4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 5x + 2$ et $\mathscr{C}_g$ sa courbe représentative.

1. Le point $M\left(\dfrac{2}{3}; 5\right)$ appartient-il à $\mathscr{C}_g$?
2. Calculer l'ordonnée du point $T \in \mathscr{C}_g$ tel que l'abscisse de T soit nulle.
3. Calculer l'abscisse du point $T \in \mathscr{C}_g$ tel que l'ordonnée de T soit nulle.

Exercice 4.5. Soient f et g deux fonctions définies sur $[-4\,;4]$.

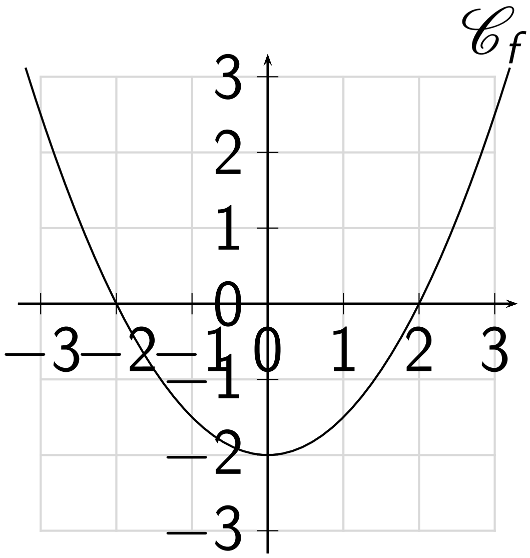
1. Résoudre graphiquement $f(x) = -1$, $f(x) = 1$, $f(x) = 2$ et $f(x) = 3$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement $g(x) \geq 1$ et $g(x) > f(x)$.
4. Résoudre graphiquement $f(x) \geq 2$.

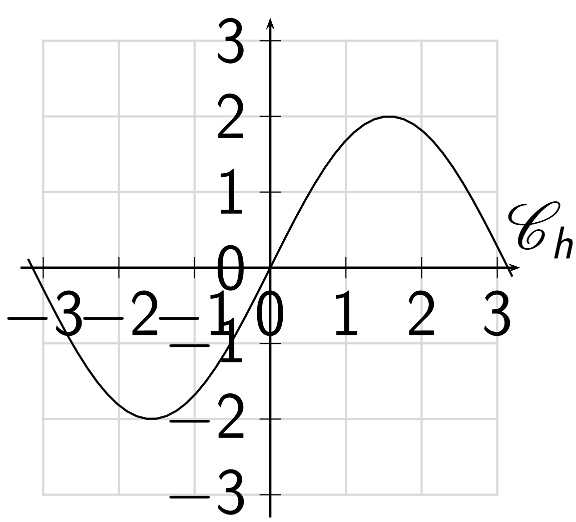


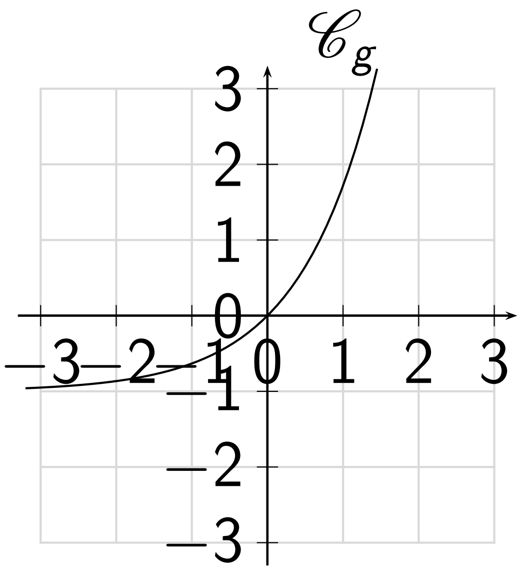
Exercice 4.6. Déterminer si chacune des fonctions f suivantes – définie sur $\mathbb{R}$ – est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

1. $f(x) = x^2$,
2. $f(x) = x^3$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{x}$,
4. $f(x) = x + 1$.

Exercice 4.7. Déterminer graphiquement si les fonctions représentées ci-dessous sont paires, impaires ou ni l'une ni l'autre.







6.2 Approfondissement

Exercice 4.8. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (3 - 2x)(5x - 1)$.

1. Déterminer les images de 0 et 1 par f.
2. Déterminer les antécédents de 0 par f.

Exercice 4.9. Soient f, g et h trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 + 4x - 6, \quad g(x) = 2(x+1)^2 - 8$$
$$\text{et} \quad h(x) = 2(x-1)(x+3).$$

1. Montrer que $f(x), g(x)$ et $h(x)$ sont trois expressions de la même fonction.
2. Répondre aux questions suivantes en choisissant à chaque fois la forme **la plus adaptée**.
   a) Chercher les éventuels antécédents de 0 et -6.
   b) Calculer les images de 0, 1 et $\sqrt{3} - 1$.
   c) Trouver les abscisses des points de f d'ordonnée égale à 24 appartenant à la courbe de f.

Exercice 4.10. [Physique] Les tuyaux utilisés en plomberies s'entartrent au fil du temps par le contact de l'eau. Cet entartrement provoque une augmentation de la consommation d'énergie nécessaire pour chauffer l'eau en fonction de l'épaisseur de tartre dans le tuyau : pour une épaisseur de $x$mm de tartre dans le tuyau, on a une augmentation de y**%** de la consommation d'énergie où y est donné par

$$y = -\frac{1}{4}x^2 + 8x, \quad \text{pour} \quad x \in [0\,;14]\,.$$

1. Calculer le pourcentage d'énergie consommée en plus pour une épaisseur de 1mm de tartre.
2. On cherche à déterminer quelle épaisseur de tartre provoque une augmentation de **15%** de la consommation d'énergie.
   a) (*) Montrer qu'il s'agit de résoudre l'équation $-\frac{1}{4}(x-16)^2 + 64 = 15$.
   b) En déduire l'épaisseur de tartre recherchée.

Exercice 4.11. [Géométrie(***)] On considère un rectangle $ABCD$ de dimensions $AB = 6$cm et $BC = 8$cm. Sur le côté $[AB]$, on place un point M quelconque. On considère ensuite les points N sur $[BC]$, P sur $[CD]$ et Q sur $[AD]$ tels que $AM = BN = CP = DQ$. On appelle x la longueur AM et f la fonction qui à x associe la valeur de l'aire de $MNPQ$.

1. Faire un schéma de la situation.
2. AM peut-elle prendre la valeur 7 ? Pourquoi ?
3. Quel est l'ensemble de définition de f ?
4. Démontrer que $f(x) = 2x^2 - 14x + 48$.
5. A l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel, tracer la courbe représentative de f.
6. Pour quelles valeurs de x l'aire de $MNPQ$ est-elle supérieur ou égale à 24cm^2.

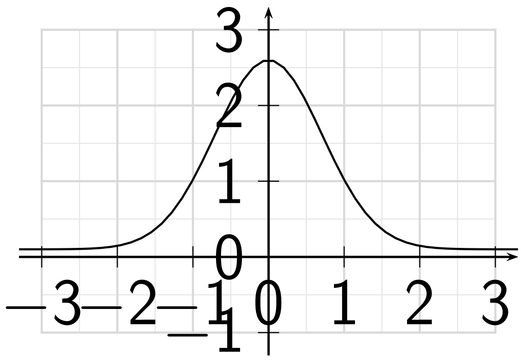
Exercice 4.12. Soit h une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

z	-4	-2	-1	1	2	5	6
$h(z)$	-4	6	4	5	-2	-4	-1

1. Quelles sont les images de -4, -2 et 2.
2. Quels sont les antécédents de -4, -2 et 5 par h ?

Exercice 4.13. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-contre. Par lecture graphique, déterminer :

1. L'image de -1 par f.
2. L'image de 0 par f.
3. Les antécédents éventuels de 1.
4. Les antécédents éventuels de -2.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 2,5$.

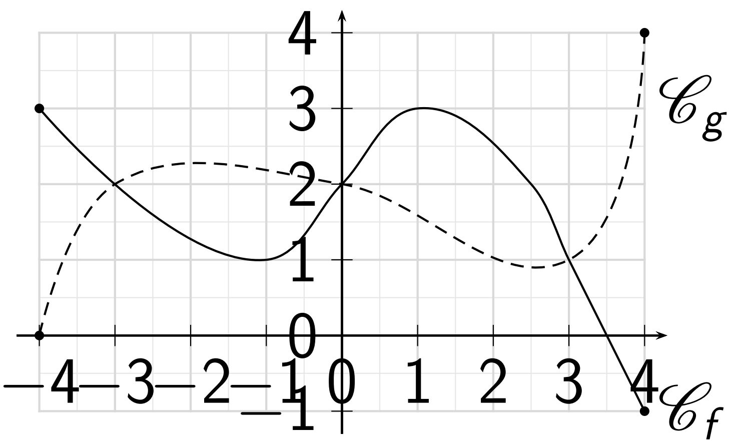


Exercice 4.14. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x + 1$.

1. Calculer l'image de 2.
2. En déduire les coordonnées d'un point appartenant à la courbe représentative de g.
3. Proposer les coordonnées d'un deuxième point appartenant à cette courbe.

Exercice 4.15. Soient f et g deux fonctions définies sur $[-4\,;4]$.

1. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) \leq 3$ et $f(x) > 1$.
3. Résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$.

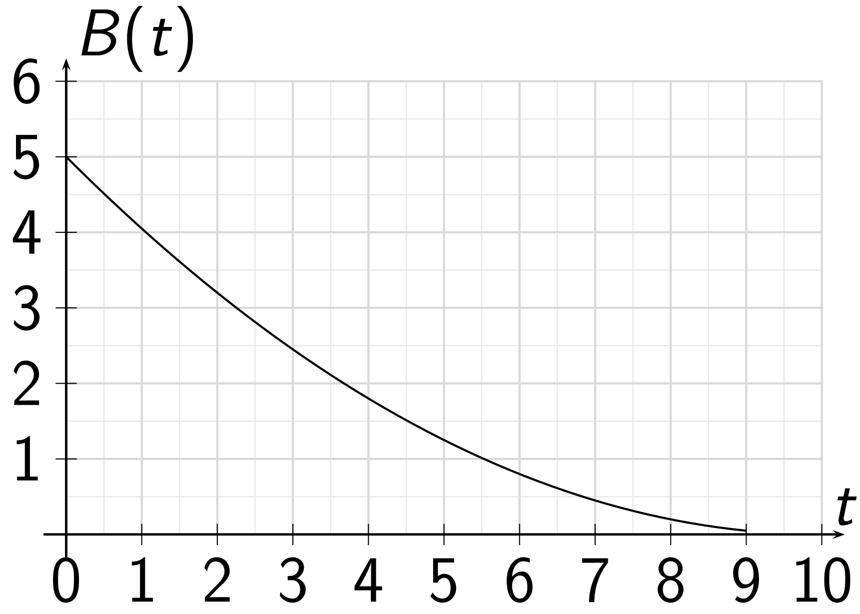


Exercice 4.16. [Biologie]

Afin de tester l'efficacité d'un antibiotique, on en introduit une dose dans bécher contenant 5000 bactéries et on observe l'évolution de la quantité de bactéries au cours du temps. Cette dernière est donnée par la fonction

$$B(t) = 0,05t^2 - t + 5,$$

où t représente le temps écoulé depuis l'introduction de l'antibiotique en heure et $B(t)$ la quantité de bactéries restantes au temps t en millier.



1. a) Déterminer $B(0)$. Est-ce cohérent avec le nombre de bactéries présentes dans le bécher initialement.

   b) Déterminer selon le modèle le nombre de bactéries présentes dans le bécher au bout de deux heures.

   c) Déterminer les valeurs de t tels que $B(t) = 0$. Interpréter ce résultat.

2. On estime qu'un antibiotique est efficace s'il divise par cinq le nombre de bactéries dans le bécher en moins de cinq heures. L'antibiotique testé ici est-il efficace ?

Exercice 4.17. Déterminer si chacune des fonctions f suivantes – définie sur $\mathbb{R}$ – est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

1. $f(x) = 2x^3 + 4$,
2. $f(x) = 4x + 2$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{2x^2+1}$,
4. $f(x) = 3x + x^3$.

6.3 Entraînement

Exercice 4.18. Pour chacune des fonctions ci-dessous, déterminer les images de 0 et 1 puis déterminer les éventuels antécédents de 0.

1. $f_1(x) = 3x + 1$;
2. $f_2(x) = -x + 8$;
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{2}x - 1$;
4. $f_4(x) = \dfrac{3x}{4} - \dfrac{1}{2}$;
5. $f_5(x) = (2x-2)(x-1)$;
6. $f_6(x) = x\left(1 - \dfrac{x}{3}\right)$.

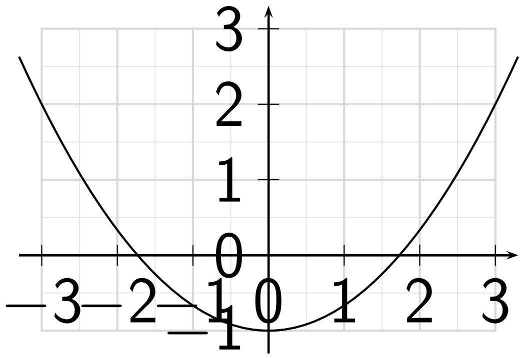
Exercice 4.19. Soit h une fonction définie par le tableau de valeurs suivants :

z	-5	$-2,5$	$-1,2$	0	2,5	4	5,5
$h(z)$	-5	3	4	5	0	-5	-1

1. Quelles sont les images de -5, 0 et 2,5.
2. Quels sont les antécédents de -5, 0 et 4 par h ?

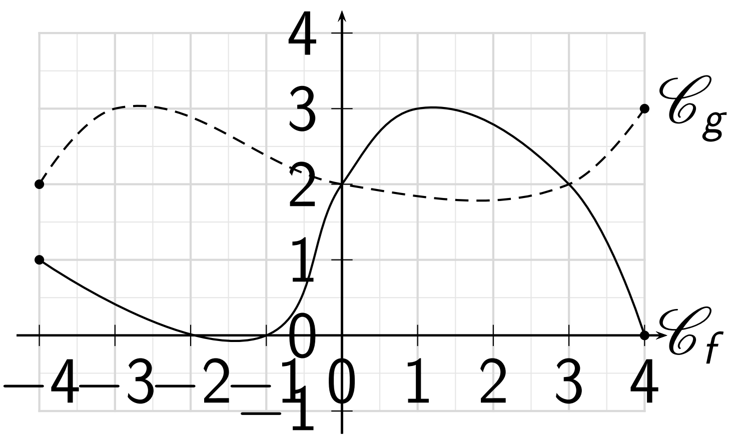
Exercice 4.20. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par la courbe ci-contre. Par lecture graphique, déterminer :

1. L'image de -2,5 par f.
2. L'image de 0 par f.
3. Les antécédents éventuels de 1.
4. Les antécédents éventuels de 2.



Exercice 4.21. Soient f et g deux fonctions définies sur $[-4\,;4]$.

1. Résoudre graphiquement $g(x) = 2$.
2. Résoudre graphiquement $f(x) = g(x)$.
3. Résoudre graphiquement $f(x) < 2$ et $g(x) \geq 2$.
4. Résoudre graphiquement $f(x) < g(x)$ et $f(x) \geq g(x)$.



Exercice 4.22. Déterminer si chacune des fonctions f suivantes – définie sur $\mathbb{R}$ – est paire, impaire ou ni l'une ni l'autre.

1. $f(x) = x^2 + 1$,
2. $f(x) = 2x$,
3. $f(x) = \dfrac{1}{x^3}$,
4. $f(x) = x^3 + x^4$.