Nom : **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

Évaluation

Second degré

Sujet A 28/09/2020

Note et remarques :

/15

Instructions générales :

- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. (/2)

Déterminer les variations et éventuels antécédents de 0 du polynôme : $P(x) = x^2 - 4x + 4$.

Les antécédents de 0 par P sont ses racines (si elles existent). On calcule son discriminant

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 0.$$

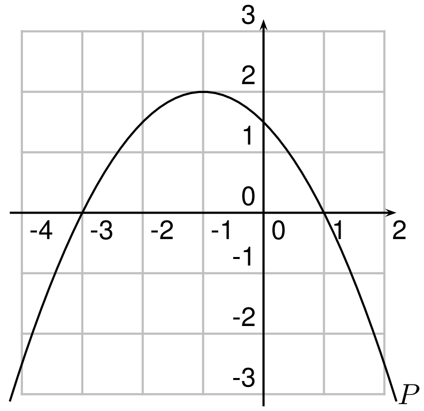
Ce dernier étant nul, P a une racine : $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = 2$.

Afin de dresser son tableau de variations, on calcule $\beta = c - \dfrac{b^2}{4a} = 0$. On a alors, puisque $a = 1 > 0$,

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$P(x)$	$+\infty$ ↘	0	↗ $+\infty$

Exercice 2. (/4)

Soit P un polynôme dont on peut observer la courbe représentative ci-contre.



1. Déterminer α et β. Justifier.

On sait que $(\alpha\,;\beta)$ est le sommet de la parabole donc $\alpha = -1$ et $\beta = 2$.

2. Déterminer les racines de P. Justifier.

Les racines de P sont les abscisses des points d'intersections de la parabole avec l'axe des abscisses donc P admet deux racines : $x_1 = -3$ et $x_2 = 1$.

3. Déterminer le coefficient dominant a de P.

En utilisant la forme canonique, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = a(x+1)^2 + 2$. Or, on sait que $P(1) = 0$ donc, en remplaçant x par 1 dans la forme canonique, on obtient $4a + 2 = 0$, soit $a = -\dfrac{1}{2}$.

4. Donner les formes canonique et factorisée de P.

P a pour forme canonique, respectivement factorisée,

$$P(x) = -\frac{1}{2}(x+1)^2 + 2, \quad \text{respectivement} \quad P(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+3).$$

Exercice 3. (/5)

Résoudre l'inéquation : $x+3 \leq \dfrac{1}{x+4}$.

On a

$$\begin{aligned} x+3 \leq \frac{1}{x+4} &\iff x+3-\frac{1}{x+4} \leq 0 \\ &\iff \frac{(x+3)(x+4)-1}{x+4} \leq 0 \\ &\iff \frac{x^2+7x+11}{x+4} \leq 0. \end{aligned}$$

On doit donc étudier le signe du polynôme $P(x) = x^2+7x+11$. Pour cela, on commence par calculer son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 7^2 - 4 \times 1 \times 11 = 5.$$

On a $\Delta > 0$ donc P a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-7-\sqrt{5}}{2} \simeq -4,6 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-7+\sqrt{5}}{2} \simeq -2,3.$$

On a $a = 1 > 0$ donc on en déduit le tableau de signes de P et de notre quotient

x	$-\infty$		x_1		-4		x_2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{P(x)}{x+4}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

On en déduit que l'inéquation a pour solution l'intervalle $]-\infty\,;x_1[\,\cup\,]-4\,;x_2]$.

Exercice 4. (/4)

La Multinationale souhaite commercialiser sa nouvelle iBike, vélo électrique connecté à votre iTruc et faisant les courses à votre place. L'un de ses principaux arguments de vente est l'autonomie de la batterie en tout temps. Or, l'autonomie des batteries dépend de la température extérieure ; le département de R&D en charge du développement de la iBike, dont vous faites partie (vous avez été embauché lorsque vous avez commencé à lire cet énoncé), a fait des tests sous plusieurs températures différentes. Après analyse, vous avez obtenu qu'une approximation de l'autonomie de la batterie exprimée en km est donnée par la formule

$$a(t) = -0.1t^2 + 5t + 110,$$

avec t température extérieure en degré Celsius. Votre $n+1$ exige que l'autonomie soit d'au moins 100km entre 0 et 30 degrés Celsius. Il veut les résultats d'ici la fin de l'heure et menace déjà de vous licencier abusivement. Dépêchez-vous de déterminer l'intervalle des températures sur lesquelles l'autonomie est d'au moins 100km ainsi que la température à laquelle elle est maximale !

Déterminer l'intervalle des températures sur lesquelles l'autonomie est d'au moins 100km revient à résoudre l'inéquation

$$a(t) = -0.1t^2 + 5t + 110 \geq 100 \iff -0.1t^2 + 5t + 10 \geq 0.$$

On veut donc le signe du polynôme $P(t) = -0.1t^2 + 5t + 10$. On commence par calculer son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 5^2 - 4 \times (-0,1) \times 10 = 29.$$

On a $\Delta > 0$ donc P a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-5 - \sqrt{29}}{2 \times (-0,1)} \simeq 52 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{-6 + \sqrt{29}}{2 \times (-0,1)} \simeq -2.$$

On a $a = -0.1 < 0$ donc on en déduit le tableau de signes de P et la solution de notre inéquation

t	$-\infty$		-2		52		$+\infty$
$P(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'autonomie de la batterie est supérieure à 100km entre -2 et 52 degrés Celsius.

Comme $a = -0,1 < 0$, l'autonomie maximale donnée par le polynôme $a(t) = -0.1t^2 + 5t + 110$ vaut $\beta = c - \frac{b^2}{4a} \simeq 172$km et est atteinte à une température de $\alpha = -\frac{b}{2a} = 25$ degré Celsius.