Nom : **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

Évaluation

Trigonométrie et Second Degré

Sujet A 15/10/2021

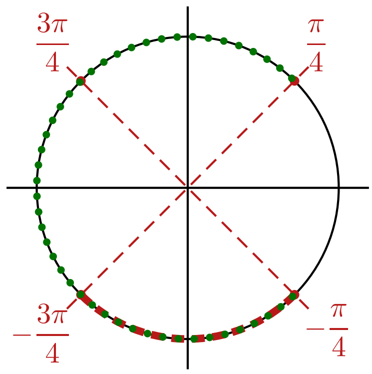
Note et remarques : /15

Instructions générales :

- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. (/3)

1. Construire – à la règle et au compas – sur le cercle ci-contre les angles $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$ et $-\frac{3\pi}{4}$. On laissera apparent les traits de constructions.



2. Résoudre dans $[-\pi\,;\pi[$ l'inéquation trigonométrique

$$\sin(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Dessiner l'ensemble solution sur le cercle ci-contre.

On a $\sin(x) \leq \frac{-\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $x \in \left[-\frac{3\pi}{4}\,;-\frac{\pi}{4}\right]$. L'intervalle est représenté sur le cercle en pointillés rouges ci-dessus.

3. Résoudre dans $[-\pi\,;\pi[$ l'inéquation trigonométrique $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dessiner l'ensemble solution sur le cercle ci-dessus.

On a $\cos(x) < \frac{\sqrt{2}}{2}$ si et seulement si $x \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}\,;\pi\right[$. L'intervalle est représenté sur le cercle en pointillés verts ci-dessus.

Exercice 2. (/3)

Résoudre l'équation trigonométrique

$$\sin(x)\cos(x) - \sin(x) = 0.$$

Indication : on pourra commencer par factoriser l'expression.

En factorisant par $\sin(x)$, on obtient

$$\sin(x)(\cos(x) - 1) = 0.$$

Par règle du produit nul, on trouve alors que

$$\sin(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \cos(x) - 1 = 0.$$

D'une part,

$$\sin(x) = 0 \iff x = 0[2\pi] \quad \text{ou} \quad x = \pi[2\pi].$$

D'autre part,

$$\cos(x) - 1 = 0 \iff \cos(x) = 1 \iff x = 0[2\pi].$$

Les solutions sont donc $0[2\pi]$ et $\pi[2\pi]$ (ou encore $0[\pi]$).

Exercice 3. (/2)

Sachant que $x \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$ et que $\sin(x) = 0,6$, déterminer la valeur de $\cos(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

On en déduit que $\cos^2(x) + 0,6^2 = 1$, donc $\cos^2(x) = 1 - 0,36 = 0,64$ et donc $\cos(x) = \pm\sqrt{0,64} = \pm 0,8$.

Or $x \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}\,;\pi\right]$, on a donc $\cos(x) \leq 0$; on en déduit que $\cos(x) = -0,8$.

Exercice 4. (/3 points)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\frac{42\pi}{5}[2\pi]$. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

On cherche l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$-\frac{45\pi}{5} + 2k\pi \in]-\pi\,;\pi].$$

On résout donc l'inéquation :

$$\begin{aligned} -\pi < -\frac{42\pi}{5} + 2k\pi \leq \pi \\ -1 < -8,4 + 2k \leq 1 \\ 7,4 < 2k \leq 9,4 \\ 3,7 < k \leq 4,7. \end{aligned}$$

L'unique valeur de k correspondante est 4. La mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$ vaut donc :

$$-\frac{42}{5}\pi + 4 \times 2\pi = -\frac{2\pi}{5}.$$

Exercice 5. (/4) Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{3x^2+2x-1}{x-2} > 0.$$

On doit étudier le signe du polynôme $P(x) = 3x^2+2x-1$. Pour cela, on commence par calculer son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 16.$$

On a $\Delta > 0$ donc P a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2 \times 3} = -1$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2 \times 3} = \frac{1}{3}$$

On a $a = 1 > 0$ donc on en déduit le tableau de signes de P et de notre quotient

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{3}$		2		$+\infty$
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$+$	
$\frac{P(x)}{x-2}$		$-$	0	$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

On en déduit que l'inéquation a pour solution l'intervalle $\left]-1\,;\frac{1}{3}\right[\cup]2\,;+\infty[$.