Nom : **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

Évaluation

Trigonométrie et Second Degré

Sujet B 15/10/2021

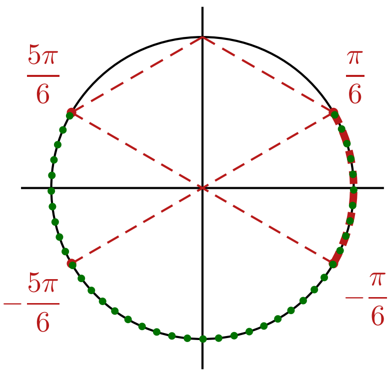
Note et remarques : $/15$

Instructions générales :

- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. ($/3$)

1. Construire – à la règle et au compas – sur le cercle ci-contre les angles $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $-\frac{\pi}{6}$ et $-\frac{5\pi}{6}$. On laissera apparent les traits de constructions.



2. Résoudre dans $[-\pi\,;\pi[$ l'inéquation trigonométrique

$$\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Dessiner l'ensemble solution sur le cercle ci-contre.

On a $\cos(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ si et seulement si $x \in \left[\frac{-\pi}{6}\,;\frac{\pi}{6}\right]$. L'intervalle est représenté sur le cercle en pointillés rouges ci-dessus.

3. Résoudre dans $[-\pi\,;\pi[$ l'inéquation trigonométrique $\sin(x) \leq \frac{1}{2}$. Dessiner l'ensemble solution sur le cercle ci-dessus.

On a $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{1}}{2}$ si et seulement si $x \in \left[-\pi\,;\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}\,;\pi\right[$. L'intervalle est représenté sur le cercle en pointillés verts ci-dessus.

Exercice 2. (/3)

Résoudre l'équation trigonométrique

$$\cos(x)\sin(x) + \cos(x) = 0.$$

Indication : on pourra commencer par factoriser l'expression.

En factorisant par $\cos(x)$, on a

$$\cos(x)\sin(x) + \cos(x) = \cos(x)(\sin(x) + 1) = 0.$$

Par règle du produit nul, on trouve alors que

$$\cos(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sin(x) + 1 = 0.$$

D'une part,

$$\cos(x) = 0 \quad \iff \quad x = \frac{\pi}{2}[2\pi] \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2}[2\pi].$$

D'autre part,

$$\sin(x) + 1 = 0 \iff \sin(x) = -1 \iff \quad x = \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

Les solutions sont donc $\pm\frac{\pi}{2}[2\pi]$, ou encore $\frac{\pi}{2}[\pi]$.

Exercice 3. (/2)

Sachant que $x \in [0\,;\pi]$ et que $\cos(x) = 0,8$, déterminer la valeur de $\sin(x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$$

On en déduit que $0,8^2 + \sin^2(x) = 1$, donc $\sin^2(x) = 1 - 0,64 = 0,36$ et donc $\cos(x) = \pm\sqrt{0,36} = \pm 0,6$.

Or $x \in [0\,;\pi]$, on a donc $\sin(x) \geq 0$; on en déduit que $\sin(x) = 0,6$.

Exercice 4. (/3 points)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs du plan tels que $(\vec{u}\,;\vec{v}) = -\frac{49\pi}{10}[2\pi]$. Déterminer la mesure principale de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$.

On cherche l'unique $k \in \mathbb{Z}$ tel que :

$$-\frac{49\pi}{10} + 2k\pi \in]-\pi\,;\pi].$$

On résout donc l'inéquation :

$$\begin{aligned} -\pi &< -\frac{49\pi}{10} + 2k\pi \leq \pi \\ -1 &< -4,9 + 2k \leq 1 \\ 3,9 &< 2k \leq 5,9 \\ 1,95 &< k \leq 2,95. \end{aligned}$$

L'unique valeur de k correspondante est 2. La mesure principale de $(\vec{u}\,;\vec{v})$ vaut donc :

$$-\frac{49}{10}\pi + 2 \times 2\pi = -\frac{9\pi}{10}.$$

Exercice 5. (/4) Résoudre l'inéquation suivante :

$$\frac{-3x^2+2x+1}{x+2} \geq 0.$$

On doit donc étudier le signe du polynôme $P(x) = -3x^2+2x+1$. Pour cela, on commence par calculer son discriminant :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times (-3) \times 1 = 16.$$

On a $\Delta = 0$ donc P a deux racines :

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2-4}{2 \times (-3)} = 1$$

et

$$x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2+4}{2 \times (-3)} = -\frac{1}{3}$$

On a $a = -3 < 0$ donc on en déduit le tableau de signes de P et de notre quotient

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$P(x)$		$-$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{P(x)}{x+2}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	0	$-$	

On en déduit que l'inéquation a pour solution l'intervalle $]-\infty\,;-2[\cup \left[-\frac{1}{3}\,;1\right]$.