

Chapitre 2

Calcul littéral

2.1 Fractions

Propriété 2.1. [Multiplication] Pour tous a, b, c et d réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a

$$\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{b \times d}, \quad \frac{a \times c}{a \times d} = \frac{c}{d}, \quad a \times \frac{c}{d} = \frac{a \times c}{d}.$$

Exemples :

1. $\frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4 \times 2}{5 \times 3} = \frac{8}{15}.$

3. $x \times \frac{4}{7} = \frac{4x}{7}.$

2. $\frac{4}{12} = \frac{4 \times 1}{4 \times 3} = \frac{1}{3}.$

Propriété 2.2. [Addition et soustraction] Pour tous a, b et c réels avec $c \neq 0$, on a

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a + b}{c}.$$

Remarque : pour additionner ou soustraire plusieurs fractions, il faut que celles-ci soient au même dénominateur.

Exemples :

1. $\frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3 - 1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$

3. $x + \frac{x}{2} = \frac{2x}{2} + \frac{x}{2} = \frac{2x + x}{2} = \frac{3x}{2} = \frac{3}{2}x.$

2. $\frac{1}{3} + \frac{5}{6} = \frac{2}{6} + \frac{5}{6} = \frac{2 + 5}{6} = \frac{7}{6}.$

★ Vidéo.

Propriété 2.3. [Division] Pour tous a, b, c et d réels avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$, on a

$$\frac{a/b}{c/d} = \frac{a \times d}{b \times c}.$$

Exemple : $\frac{2/3}{5/6} = \frac{2 \times 6}{3 \times 5} = \frac{2 \times 2 \times 3}{3 \times 5} = \frac{4}{5}$.

2.2 Puissances

Propriété 2.4. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N}$. On a

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$;

4. $(ab)^n = a^n \times b^n$;

2. si $a \neq 0$, $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

5. si $b \neq 0$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

3. $(a^m)^n = a^{mn}$;

Exemples :

1. $2^3 \times 2^4 = 2^7$;

3. $(c^2)^{10} = c^{20}$;

2. $\frac{3^4}{3^3} = 3$;

4. $(4x)^2 = 16x^2$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

2.3 Identités remarquables

Propriété 2.5. Pour tous nombres réels a et b , on a :

Forme développée (somme)	=	Forme factorisée (produit)
$a^2 + 2ab + b^2$	=	$(a + b)^2$
$a^2 - 2ab + b^2$	=	$(a - b)^2$
$a^2 - b^2$	=	$(a + b)(a - b)$

Démonstration. Exercice. □

Exemples :

1. $(a + 3)^2 = a^2 + 6a + 9$.

3. $y^2 - 25 = (y - 5)(y + 5)$.

2. $(2z - 1)^2 = 4z^2 - 4z + 1$.

4. $(w + 2t)(w - 2t) = w^2 - 4t^2$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2 ; vidéo (développer) ; vidéo (factoriser).

2.4 Équations et inéquations

2.4.1 Équations et inéquations

Définition 2.1.

1. Une **équation**, resp. **inéquation**, est une égalité, resp. inégalité, entre deux expressions algébriques dépendant d'une même variable, généralement notée x (mais pas nécessairement).
2. Une **solution d'une équation**, resp. **inéquation**, est une valeur de l'inconnue x pour laquelle l'égalité, resp. l'inégalité, est vraie.
3. **Résoudre une équation ou inéquation**, c'est trouver **l'ensemble de ses solutions** (c'est à dire toutes ses solutions).
4. Deux équations ou inéquations sont **équivalentes** si elles ont le même ensemble de solutions. L'équivalence est symbolisé par \iff .

Exemple :

- $x^2 + 4 = 4x$ est une équation dont 2 est solution car $2^2 + 4 = 4 \times 2$. Nous n'avons pas pour autant résolu cette équation car nous ne savons pas *a priori* si elle admet d'autres solutions.
- $x + 4 \geq 1$ est inéquation dont 0 est solution car $0 + 4 = 4 \geq 1$. De même, 2 est aussi une solution car $2 + 4 = 6 \leq 1$. Il existe en fait une infinité de solution.

Propriété 2.6.

1. Si l'on additionne ou l'on soustrait le même nombre aux deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.
2. Si l'on multiplie ou divise par un même nombre différent de 0 les deux membres d'une équation, on obtient une équation équivalente.
3. Lorsque l'on multiplie (ou divise) par un nombre négatif les deux membres d'une inéquation, on obtient une inéquation équivalente dont le sens de l'inégalité est changé.

Exemple :

1. Résolvons l'équation $2x + 1 = 0$:

$$\begin{aligned} 2x + 1 &= 0 \\ \iff 2x &= -1 && \text{On a ajouté -1 de chaque côté de l'égalité.} \\ \iff x &= -\frac{1}{2} && \text{On a divisé par 2 de chaque côté.} \end{aligned}$$

L'équation admet pour unique solution $-\frac{1}{2}$.

2. Résolvons l'inéquation $-2x + 2 \geq 0$.

$$\begin{aligned} & -2x + 2 \geq 0 \\ \iff & -2x \geq -2 \\ \iff & x \leq \frac{-2}{-2} \quad \text{On divise par -2 de chaque côté : le sens change.} \\ \iff & x \leq 1. \end{aligned}$$

L'inéquation admet pour solution tous les nombres inférieurs ou égaux à 1, i.e. l'intervalle $]-\infty; 1]$.

★ Vidéo inéquations.

2.4.2 Équations produit et quotient

Propriété 2.7.

1. *Un produit de facteur est nul si et seulement si l'un d'entre eux, au moins, est nul.*
2. *Une fraction est nulle si et seulement si le numérateur est nul.*

Remarque : le dénominateur d'une fraction est nécessairement non nul.

Exemples :

1. Résolvons $(x + 3)(x - 7) = 0$. D'après la règle du produit nul, soit $x + 3 = 0$, soit $x - 7 = 0$, donc $x = -3$ ou $x = 7$.
2. Résolvons $\frac{2x + 5}{x^2 + 1} = 0$. D'après la règle du quotient nul, le numérateur est nul : $2x + 5 = 0$, d'où $2x = -5$ et donc $x = -\frac{5}{2}$.

★ Vidéo produit 1 ; vidéo produit 2 ; vidéo quotient 1 ; vidéo quotient 2.

2.5 Attendus et savoir-faire

- Connaître et utiliser les règles de calculs sur les puissances et les fractions.
- Savoir développer, factoriser, réduire une expression.
- Connaître les identités remarquables et savoir les utiliser dans les deux sens.
- Savoir résoudre une équation simple, produit ou quotient.
- Savoir résoudre une inéquation.

2.6 Exercices

2.6.1 Démarrage

Exercice 2.1. Simplifier les fractions suivantes :

- | | | | |
|---------------------------------------|---|-------------------------|--|
| 1. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3}$; | 4. $\frac{z}{3} - \frac{2}{3}$; | 7. $\frac{2/3}{4/3}$; | 10. $\frac{25/16}{10/32}$; |
| 2. $\frac{1}{2} \times \frac{2}{3}$; | 5. $\frac{a}{40} \times \frac{2a}{3}$; | 8. $\frac{6/5}{3/20}$; | 11. $\frac{\frac{1}{2} - 1}{\frac{1}{2} + 1}$; |
| 3. $3 + \frac{3}{2}$; | 6. $\frac{z}{3} - \frac{2z}{5}$; | 9. $\frac{21/4}{7/8}$; | 12. $\frac{\frac{1}{5} + 2}{\frac{1}{5} - 2} \times \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}}$. |

Exercice 2.2. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | | |
|--------------------------|----------------------------|--|--|
| 1. $2^3 \times 2^5$; | 3. $4^5 \times 8^9$; | 5. $(9r)^3 \times (2r)^2$; | 7. $\frac{\frac{n^2}{m^5} \times n^3}{\frac{n^9}{m^8} \times m^5}$. |
| 2. $\frac{13^2}{13^7}$; | 4. $\frac{(4a)^3}{2a^9}$; | 6. $\frac{n^6 \times m^7}{n^2 \times m^3}$; | |

Exercice 2.3. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|-----------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $2x - 3 + x + 9$; | 3. $y - (5 + y)$; | 5. $3 - 2a + 8a^2 - (a - 1)$; |
| 2. $x - 5 - 3x$; | 4. $x^2 - x + 6x^2 + 3x - 9$; | 6. $3b + 5b^2 - (2b + 1)$. |

Exercice 2.4. Développer et réduire les expressions suivantes :

- | | | |
|-----------------|-----------------------|-----------------------|
| 1. $3(2 + x)$; | 3. $-2(y - 7)$; | 5. $(t - 2)(2 - t)$; |
| 2. $a(3 - a)$; | 4. $(r + 2)(r + 3)$; | 6. $z(2 - z)$. |

Exercice 2.5. Factoriser les expressions suivantes :

- | | | |
|----------------|-----------------|------------------------------|
| 1. $2x + 2y$; | 3. $x + bx$; | 5. $3z^2 - (z + 1)z^2$; |
| 2. $2a - 4b$; | 4. $x^2 - 2x$; | 6. $2(y + 1) - 3(y + 1)^2$. |

Exercice 2.6. Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

- | | |
|------------------|-----------------------|
| 1. $(x + 1)^2$; | 3. $(z + 2)(z - 2)$; |
| 2. $(y - 2)^2$; | 4. $(2b - 3)^2$. |

Exercice 2.7. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1. $x^2 - 3^2$; | 3. $a^2 + 2a + 1$; |
| 2. $25 - y^2$; | 4. $b^2 - 4b + 4$. |

Exercice 2.8. Résoudre les équations suivantes :

1. $x + 5 = 14$;

3. $4 - 7r = 15$;

5. $(y + 3)(7 - y) = 0$;

2. $2z + 3 = 12$;

4. $4x + 6 = 8 - x$;

6. $\frac{5a + 3}{a + 4} = 0$.

Exercice 2.9. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x - 5 > 4$;

4. $2y + 1 > -3y + 5$;

6. $\frac{2}{5}a + 4 \leq \frac{1}{10}a$.

2. $3z - 2 < 12$;

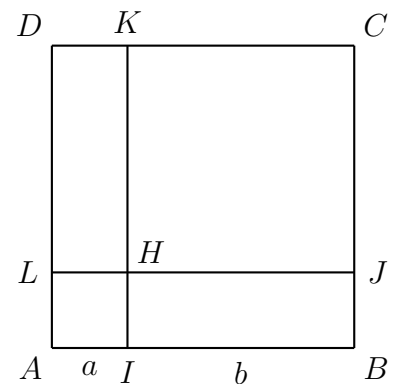
5. $\frac{1}{3}x - 7 \geq 0$;

3. $7 - 4r \leq 5$;

2.6.2 Approfondissement

Exercice 2.10. [Démonstration] On considère les carrés $ABCD$, $AIHL$ et $HJCK$ comme sur la figure ci-contre ; $AIHL$ de côté a et $HJCK$ de côté b .

1. Exprimer en fonction de a et b les aires des carrés $AIHL$, $HJCK$ et $ABCD$: \mathcal{A}_{AIHL} , \mathcal{A}_{HJCK} et \mathcal{A}_{ABCD} .
2. Exprimer en fonction de a et b les aires des rectangles $IBJH$ et $LHKD$: \mathcal{A}_{IBJH} et \mathcal{A}_{LHKD} .
3. Exprimer l'aire de $ABCD$ en fonction de celles des carrés $AIHL$ et $HJCK$, et des rectangles $IBJH$ et $LHKD$.
4. En déduire l'identité remarquable $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.



Exercice 2.11. Résoudre les équations suivantes :

1. $(2t + 1)(4 - t) = 0$;

4. $9 - x^2 = 0$;

7. $\frac{(3z + 12)z}{z^2 + 1} = 0$;

2. $s(5s + 6)(3s - 2) = 0$;

5. $(y + 2)^2 - 25 = 0$;

3. $(x + 2)(x^2 - 1) = 0$;

6. $t^2 - 6t + 9 = 0$;

8. $\frac{u^2 - 4u + 4}{2u^2 + 4} = 0$.

Exercice 2.12.

1. Développer l'expression $A = (x + 2)^2 - 9$.

2. Factoriser A .3. En déduire les solutions de l'équation $x^2 + 4x - 5 = 0$.

Exercice 2.13.

1. Développer l'expression $A = (y - 3)^2 - 49$.

2. Factoriser A .3. En déduire les solutions de l'équation $y^2 - 6y - 40 = 0$.

2.6.3 Entraînement

Exercice 2.14. Simplifier les fractions suivantes :

- | | | | |
|---|---|-------------------------|--------------------------|
| 1. $\frac{1}{4} + \frac{3}{5}$; | 4. $\frac{z}{4} - \frac{2}{5}$; | 7. $\frac{5/6}{20/3}$; | 9. $\frac{10/35}{5/7}$; |
| 2. $\frac{1}{6} \times \frac{12}{20}$; | 5. $\frac{a}{18} \times \frac{6a}{7}$; | | |
| 3. $7 - \frac{2}{3}$; | 6. $\frac{3z}{5} - \frac{z}{8}$; | 8. $\frac{6/4}{8/9}$; | 10. $\frac{4/5}{8/15}$. |

Exercice 2.15. Simplifier les expressions suivantes :

- | | | |
|--------------------------|-------------------------------|--|
| 1. $5^4 \times 5^8$; | 3. $9^{30} \times 27^{18}$; | 5. $(3r)^4 \times (6r)^3$; |
| 2. $\frac{17^4}{17^2}$; | 4. $\frac{(2a)^8}{4a^{10}}$; | 6. $\frac{n^{12} \times m^{32}}{n^{90} \times m^{15}}$. |

Exercice 2.16. Développer et réduire les expressions suivantes :

- | | | |
|-------------------|------------------------|-------------------------|
| 1. $7(x + 4)$; | 3. $-4(3y + 1)$; | 5. $(2t - 3)(4 - 5t)$; |
| 2. $-2a(7 + a)$; | 4. $(r + 5)(r - 11)$; | 6. $6z(7 - 3z)$. |

Exercice 2.17. Factoriser les expressions suivantes :

- | | | |
|-----------------|-----------------|-----------------------------|
| 1. $3x + 3y$; | 3. $x + 2cx$; | 5. $(7z + 1)z^2 - 5z^2$; |
| 2. $6a - 12b$; | 4. $x^2 + 5x$; | 6. $(y - 8)^2 - 6(y - 8)$. |

Exercice 2.18. Développer les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

- | | |
|------------------|-----------------------|
| 1. $(x + 2)^2$; | 3. $(z + 7)(z - 7)$; |
| 2. $(6 - y)^2$; | 4. $(3b - 9)^2$. |

Exercice 2.19. Factoriser les expressions suivantes à l'aide d'identités remarquables :

- | | |
|------------------|---------------------|
| 1. $x^2 - 5^2$; | 3. $a^2 - 2a + 1$; |
| 2. $64 - y^2$; | 4. $b^2 + 6b + 9$. |

Exercice 2.20. Résoudre les équations suivantes :

- | | | |
|--------------------|-----------------------------|-------------------------------------|
| 1. $x - 7 = 30$; | 4. $6x + 4 = 1 - 8x$; | 7. $\frac{3a + 5}{4a + 1} = 0$; |
| 2. $4z - 3 = 21$; | 5. $(y + 7)(3 - y) = 0$; | |
| 3. $7 - 4r = 51$; | 6. $z(z + 1)(5z + 3) = 0$; | 8. $\frac{y^2 - 36}{y^2 + 1} = 0$. |

Exercice 2.21. Résoudre les inéquations suivantes :

1. $x + 6 > -3$;

4. $-4y - 3 > y - 8$;

6. $\frac{4}{7}a - 9 \leq \frac{3}{14}a$.

2. $-3z + 5 > 2$;

5. $\frac{1}{5}x - 8 \geq 0$;

3. $5 - 3r \leq 5$;

Exercice 2.22.

1. Développer l'expression $A = (z + 4)^2 - 36$.

2. Factoriser A .

3. En déduire les solutions de l'équation $z^2 + 8z - 20 = 0$.

Exercice 2.23.

1. Développer l'expression $A = \left(t - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$.

2. Factoriser A .

3. En déduire les solutions de l'équation $t^2 - 3t - \frac{16}{4} = 0$.