Chapitre 1

Ensembles et Intervalles

1.1 Ensembles de nombres

Définition 1.1. *L'ensemble des **entiers naturels** $0, 1, 2, 3, ...$ est noté $\mathbb{N}$:*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3...\}.$$

Définition 1.2. *L'ensemble des **entiers relatifs** $..., -2, -1, 0, 1, 2, ...$ est noté $\mathbb{Z}$:*

$$\mathbb{Z} = \{..., -2, -1, 0, 1, 2...\}.$$

Définition 1.3. *L'ensemble des **nombres décimaux** noté $\mathbb{D}$ est défini par*

$$\mathbb{D} = \left\{ \frac{a}{10^n},\ a \in \mathbb{Z},\ n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Définition 1.4. *L'ensemble des **nombres rationnels** noté $\mathbb{Q}$ est défini par*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}^* \right\}.$$

Remarque : La notation $\mathbb{N}^*$ signifie $\mathbb{N}$ privé de 0, on a donc

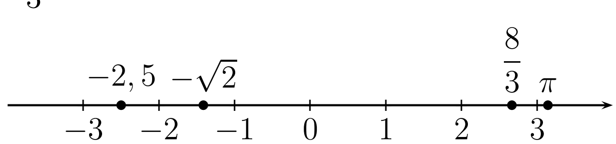
$$\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3...\}.$$

Il en va de même avec $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$...

Définition 1.5. *L'ensemble des nombres connus est dit ensemble des **nombres réels** et noté $\mathbb{R}$.*

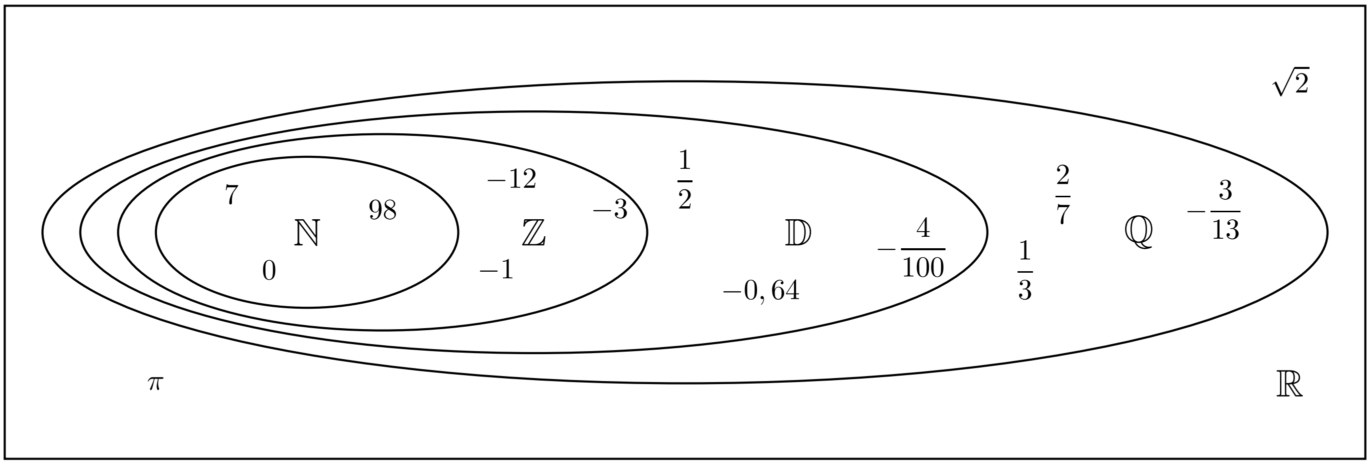
Propriété 1.1. *Tout réel est représenté par l'abscisse d'un point sur la droite numérique.*

Exemples : $-\sqrt{2}$, $-2,5$, $\dfrac{8}{3}$ et π sont ainsi placés sur la droite numérique :



Propriété 1.2. *Les ensembles ci-dessus sont inclus les uns dans les autres de la façon suivante (le symbole $\subset$ signifie « inclus dans ») :*

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Remarque On peut voir que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$ sont différents en montrant par exemple que $\sqrt{2}$ et π ne sont pas dans $\mathbb{Q}$.

1.2 Intervalles de $\mathbb{R}$

1.2.1 Intervalles

Définition 1.6. *Soient a et b deux nombres réels.*
L'intervalle *$[a;b]$ est l'ensemble des réels x tels que $a \leq x \leq b$. On définit de la même manière les intervalles $[a;b[$, $]a;b]$ et $]a,b[$.*

Intervalle	*Ensemble des réels x tels que...*
$[a;b]$	$a \leq x \leq b$
$]a;b[$	$a < x < b$
$]a;b]$	$a < x \leq b$
$[a;b[$	$a \leq x < b$

Les réels a et b sont appelés ***bornes de l'intervalle****.*

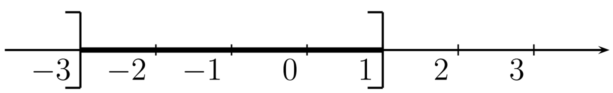
Exemple : $-0,3$ appartient à l'intervalle $]-1,2]$, mais -1 n'appartient pas à cet intervalle.

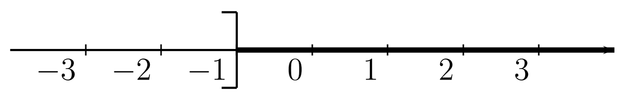
Définition 1.7. *Soit a un nombre réel.* ***L'intervalle*** $[a;+\infty[$ *est l'ensemble des réels x tels que $x \geq a$. On définit de la même façon les intervalles $]-\infty;a]$, $]a;+\infty[$ et $]-\infty;a[$.*

Intervalle	*Ensemble des réels x tels que...*
$[a;+\infty[$	$x \geq a$
$]a;+\infty[$	$x > a$
$]-\infty;a]$	$x \leq a$
$]-\infty;a[$	$x < a$

Remarque : L'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels est l'intervalle $]-\infty;+\infty[$.

Exemple de représentation graphique : ci-dessous sont représentés les intervalles $]-3\,;1]$ et $]-1\,;+\infty[$.





Définition 1.8. *On appelle* ***longueur*** *(ou* ***amplitude****) d'un intervalle la distance $b-a$.*

1.2.2 Union et intersection

Définition 1.9. *Soient I et J deux intervalles.*

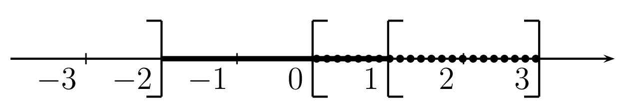
— *L'****intersection*** *de I et J est l'ensemble des réels appartenant à I* **et** *J, il est noté $I \cap J$.*

— *L'****union*** *de I et J est l'ensemble des réels appartenant à I* **ou** *J, il est noté $I \cup J$.*

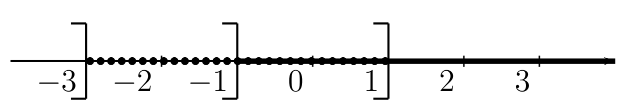
Remarque : lorsque qu'il n'y a aucun élément qui soit à la fois dans I et J, leur intersection est alors l'ensemble vide noté $\emptyset$.

Exemples :

1. $I = [0\,;3]$ et $J =]-2\,;1[$. On a :
   $I \cap J = [0\,;1[$,
   $I \cup J =]-2\,;3]$.



2. $I =]-3\,;1]$ et $J =]-1\,;+\infty[$. On a :
   $I \cap J =]-1\,;1]$,
   $I \cup J =]-3\,;+\infty[$.



★ Vidéo (intersection) ; vidéo (union).

1.3 Valeur absolue et intervalles

1.3.1 Distance entre deux réels et valeur absolue

Définition 1.10. *La* ***distance de deux réels*** *a et b est la distance des points A et B d'abscisses respectives a et b sur la droite numérique.*

Propriété 1.3. *La distance de a à b est égale à :*

1. *$b - a$ si $b > a$;*
2. *$a - b$ si $a > b$.*

On note cette distance $|a - b|$.

Définition 1.11. *La* ***valeur absolue*** *d'un réel x est la distance de ce réel à 0 sur la droite numérique. Elle est notée $|x|$.*

Remarque : La valeur absolue est une distance : elle est toujours positive ou nulle. Ainsi, on distingue deux cas :

1. Si $x \geq 0$, $|x| = x$.
2. Si $x < 0$, $|x| = -x$.

Exemples : $|4| = 4$ et $|-3| = 3$.

Propriété 1.4. *Pour tout réel x, on a $|x| = \sqrt{x^2}$.*

1.3.2 Valeur absolue et intervalle

Propriété 1.5. *L'intervalle $[a - r\,; a + r]$ est l'ensemble des réels x tels que $|x - a| \leq r$. C'est l'ensemble des réels x qui sont à une distance inférieure ou égale à r du réel a.*

Exemples :

1. On veut caractériser l'intervalle $J = [-3; 1]$. C'est l'ensemble des réels x tels que $-3 \leq x \leq 1$.
   - Le centre de l'intervalle J est le réel $a = -1$.
   - On peut écrire $[-3\,; 1] = [-1 - 2\,; -1 + 2]$.
   - Donc J est l'ensemble des réels x tels que $|x - (-1)| \leq 2$, ou encore $|x + 1| \leq 2$.
   - J est donc l'ensemble des réels situés à une distance inférieure ou égale à 2 du réel -1.
2. On veut résoudre l'équation $|x - 4| \leq 3$. On cherche l'ensemble des nombres x qui sont à une distance inférieure ou égale à 3 de 4. D'après la propriété précédente, cet ensemble est l'intervalle $[1\,; 7]$.

1.4 Attendus et savoir-faire

- Connaître les différents ensembles de nombres et savoir donner des exemples de nombres y appartenant ou pas.
- Savoir si un nombre appartient à un intervalle ou pas.
- Passer d'un intervalle à sa représentation graphique et inversement.
- Déterminer l'union et l'intersection de deux intervalles.

1.5 Exercices

1.5.1 Démarrage

Exercice 1.1. À quel(s) ensemble(s) appartient(nent) les nombres suivants :

$$\frac{1}{2}, \quad \sqrt{5}, \quad \frac{10-4}{3}, \quad -\sqrt{16}, \quad \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}, \quad \sqrt{16}-\sqrt{25}, \quad \frac{91}{7}, \quad \frac{34}{2}-289.$$

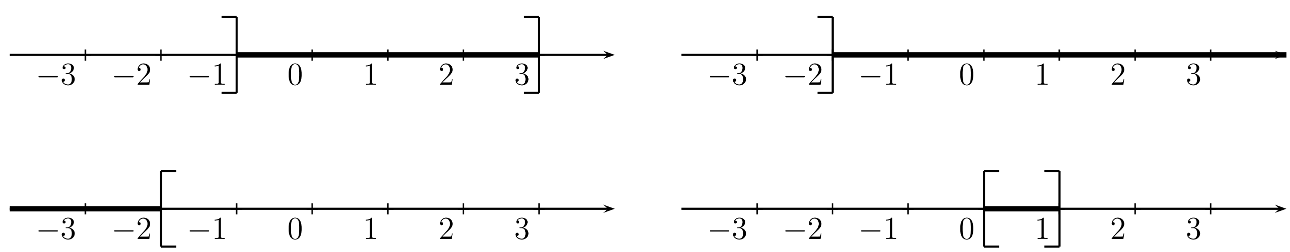
Exercice 1.2. Donner dans chaque cas un exemple de valeur de x vérifiant les conditions suivantes.

1. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{N}$;
2. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{Z}$;
3. $x \in \mathbb{R}$ et $x \notin \mathbb{Q}$;
4. $x \in \mathbb{Q}$ et $x \notin \mathbb{R}$.

Exercice 1.3. Écrire les intervalles suivants sous forme d'inégalités et les représenter graphiquement.

1. $[-1\,;4]$;
2. $[100\,;103[$;
3. $]-23\,;-20[$;
4. $]0\,;10]$;
5. $]-\infty\,;2[$;
6. $[12\,;+\infty[$;
7. $]-\infty\,;4]$;
8. $]-1\,;+\infty[$.

Exercice 1.4. Donner les intervalles correspondant aux représentations ci-dessous.



Exercice 1.5. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des symboles $\in$ et $\notin$.

	$]-\infty\,;0[$	$[9\,;15[$	$[-5\,;5]$	$]0\,;17]$	$[-2\,;+\infty[$
0					
5					
$\frac{17}{4}$					
$\sqrt{2}$					
$1-\pi$					

Exercice 1.6. Représenter graphiquement les unions et intersections suivantes et dire à quel ensemble elles sont égales.

1. $[-1\,;15]\cap[12\,;+\infty[$;
2. $[10\,;103[\,\cap\,]0\,;50[$;
3. $]-23\,;-10[\,\cap\,]-30\,;-5[$;
4. $]0\,;10]\cup[2\,;18]$;
5. $]-\infty\,;4]\cup\,]0\,;\pi]$;
6. $]-1\,;+\infty[\,\cup\,]-\infty\,;7[$.

Exercice 1.7. Écrire à l'aide de valeurs absolues les ensembles suivants :

$$[-2\,;6]\,,\quad [8\,;12]\,,\quad]3\,;7[\,,\quad]-2\,;2[\,.$$

Exercice 1.8. Écrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants :

$$|x-3|\leq 4,\quad |x+2|\geq 1,\quad |x-2|<7,\quad \left|x+\frac{1}{4}\right|<1.$$

1.5.2 Approfondissement

Exercice 1.9. Soit $n\in\mathbb{N}$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $2n+1\in\mathbb{N}$;
2. $2n+1\in\mathbb{Q}$;
3. $3n-7\in\mathbb{N}$;
4. $\dfrac{n-6}{2}\in\mathbb{Z}$;
5. $\dfrac{n+1}{\sqrt{2}}\in\mathbb{R}$;
6. $\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$.

Exercice 1.10. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Donner un contre-exemple si fausse.

1. La différence entre deux entiers naturels est un entier naturel.
2. Le quotient de deux nombres décimaux est décimal.
3. Le quotient de deux nombres réels est rationnel.
4. Le produit d'un rationnel par un entier relatif est rationnel.

Exercice 1.11.

1. Trouver deux nombres irrationnels différents dont le produit est irrationnel.
2. Trouver deux nombres irrationnels différents dont le produit est un entier naturel.

Exercice 1.12. Représenter graphiquement les unions et intersections suivantes et dire à quel ensemble elles sont égales.

1. $[-1\,;2]\cap\,]2\,;+\infty[$;
2. $[10\,;13[\,\cap\,]14\,;50[$;
3. $]-\infty\,;10[\,\cap[-30\,;10]$;
4. $]-12\,;0]\cap[-12\,;0[$;
5. $]-3\,;4[\,\cap\mathbb{N}$;
6. $]-3\,;4[\,\cap\mathbb{Z}$;
7. $]0\,;+\infty[\,\cap\mathbb{N}$;
8. $\mathbb{R}\cap\mathbb{Z}$;
9. $]-\infty\,;0]\cup\,]0\,;\pi[$;
10. $]-\infty\,;-1[\,\cup\,]-1\,;+\infty[$;
11. $]-5\,;5[\,\cup[-10\,;10]$;
12. $\left]0\,;\sqrt{2}\right[\cup\left[\sqrt{2}\,;\pi\right]$;
13. $]-\infty\,;-1[\cup[-1\,;1]\cup]1\,;+\infty[$;
14. $\mathbb{R}\cup\mathbb{Q}$;
15. $]0\,;+\infty[\,\cup\mathbb{N}$

Exercice 1.13. Écrire à l'aide de valeurs absolues les ensembles suivants :

$$[-4\,;4]\,,\quad]-\infty\,;3[\,\cup\,]5\,;+\infty[\,,\quad]-\infty\,;-2]\cup[2\,;+\infty[\,,\quad]-\infty\,;-4]\cup[2\,;+\infty[\,.$$

Exercice 1.14. Écrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants :

$$|x-2|\geq 4,\quad |x|>1,\quad |x-1|>7,\quad \left|x+\frac{1}{4}\right|\geq 2.$$

1.5.3 Entraînement

Exercice 1.15. À quel(s) ensemble(s) appartient(nent) les nombres suivants :

$$\frac{1}{3},\quad \sqrt{4},\quad \frac{6-4}{4},\quad -\sqrt{36},\quad \frac{1}{10}+\frac{1}{5},\quad \sqrt{25}-\sqrt{49},\quad \frac{101}{8},\quad \frac{27}{3}-89.$$

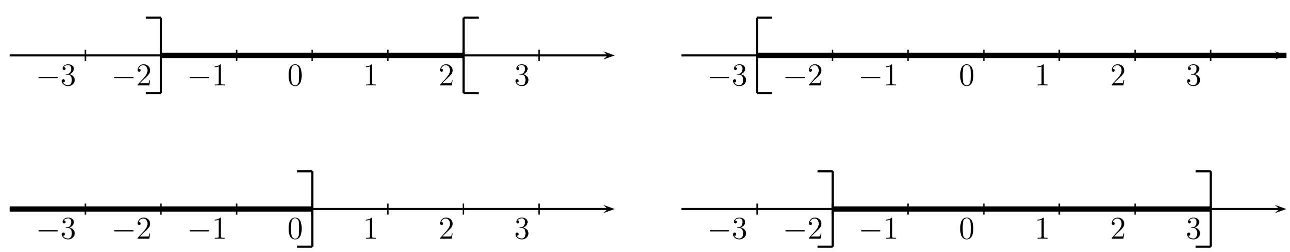
Exercice 1.16. Soit $n\in\mathbb{N}$. Dire si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

1. $10n+11\in\mathbb{N}$;
2. $10n+11\in\mathbb{Q}$;
3. $20n-20\in\mathbb{N}$;
4. $\dfrac{n+1}{2}\in\mathbb{Z}$;
5. $-\dfrac{\sqrt{n+1}}{5}\in\mathbb{R}$;
6. $1-2\sqrt{n}\in\mathbb{Q}$.

Exercice 1.17. Écrire les intervalles suivants sous forme d'inégalités et les représenter graphiquement.

1. $[15\,;21]$;
2. $[-4\,;8[$;
3. $]-3\,;0[$;
4. $]0\,;9]$;
5. $]-\infty\,;-3[$;
6. $[0\,;+\infty[$;
7. $]-\infty\,;100]$;
8. $]-5\,;+\infty[$.

Exercice 1.18. Donner les intervalles correspondant aux représentations ci-dessous.



Exercice 1.19. Compléter le tableau ci-dessous à l'aide des symboles $\in$ et $\notin$.

	$[0\,;+\infty[$	$]1\,;5[$	$[-1\,;1]$	$]-10\,;0]$	$]-\infty\,;\pi]$
1					
-2					
$-\frac{1}{3}$					
π					
$1-\sqrt{5}$					

Exercice 1.20. Représenter graphiquement les unions et intersections suivantes et dire à quel ensemble elles sont égales.

1. $[-1\,;2] \cap [0\,;+\infty[$;
2. $[10\,;13[\cap]11\,;15[$;
3. $]-\infty\,;1[\cap [-3\,;1]$;
4. $]-12\,;0] \cap [0\,;12[$;
5. $]-\pi\,;\pi] \cup]\pi\,;2\pi[$;
6. $]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$;
7. $]-1\,;1[\cup [-2\,;2]$;
8. $\left]0\,;\sqrt{5}\right[\cup \left[\sqrt{5}\,;2\sqrt{5}\right]$;
9. $]-\infty\,;-\pi]\cup]-\pi\,;\pi[\cup[\pi\,;+\infty[$.

Exercice 1.21. Écrire à l'aide de valeurs absolues les ensembles suivants :

$$[-4\,;4]\,,\quad]-6\,;-3[\,,\quad]-\infty\,;-5] \cup [-3\,;+\infty[\,,\quad]-\infty\,;-4[\cup [4\,;+\infty[\,.$$

Exercice 1.22. Écrire sous forme d'intervalle les ensembles suivants :

$$|x+3| \leq 4, \quad |x-2| < 5, \quad |x+8| > 7, \quad \left|x+\frac{1}{3}\right| \geq 2.$$