

# Chapitre 3

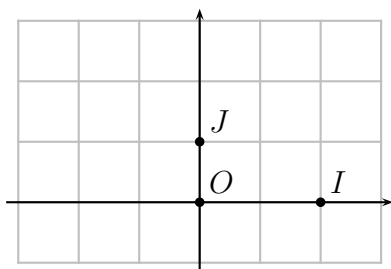
## Géométrie plane

### 3.1 Repère du plan

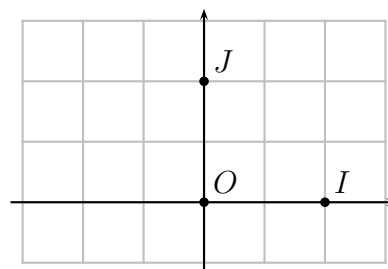
**Définition 3.1.** Soient  $O, I$  et  $J$  trois points distincts du plan.  $(O, I, J)$  est un repère :

- *quelconque* si le triangle  $OIJ$  est quelconque ;
- *orthogonal* si le triangle  $OIJ$  est rectangle en  $O$  ;
- *orthonormé* si le triangle  $OIJ$  est rectangle et isocèle en  $O$ .

Le point  $O$  est l'origine du repère, la droite  $(OI)$  est appelée axe des abscisses et la droite  $(OJ)$  des ordonnées.



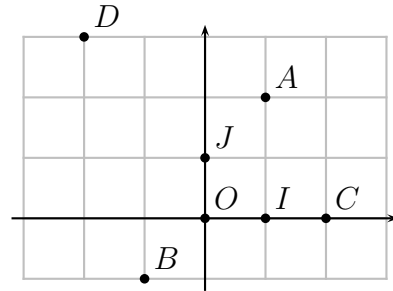
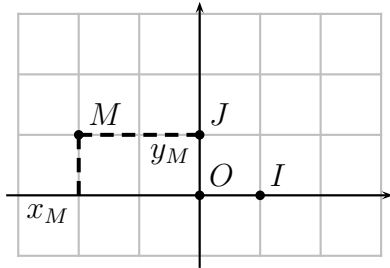
Repère orthogonal



Repère orthonormé

**Définition 3.2.** Soient  $(O, I, J)$  un repère orthonormé du plan et  $M$  un point quelconque du plan. La parallèle à  $(OJ)$  passant par  $M$  coupe l'axe  $(OI)$  en  $P$  et la parallèle à  $(OI)$  passant par  $M$  coupe l'axe  $(OJ)$  en  $Q$ .

- **L'abscisse**  $x_M$  de  $M$  dans le repère  $(O, I, J)$  est l'abscisse de  $P$  dans le repère  $(O, I)$  de l'axe  $(OI)$ .
- **L'ordonnée**  $y_M$  de  $M$  dans le repère  $(O, I, J)$  est l'abscisse de  $Q$  dans le repère  $(O, J)$  de l'axe  $(OJ)$ .
- Les coordonnées de  $M$  sont notées  $M(x_M; y_M)$ .



**Exemples :** Dans le repère  $OIJ$  ci-dessus à droite, les points  $A$  et  $B$  ont pour coordonnées  $A(1;2)$  et  $B(-1;-1)$ . De même, on place  $C(2;0)$  et  $D(-2;3)$ .

**Propriété 3.1.** Deux points sont **confondus** si, et seulement si, ils ont les mêmes coordonnées dans un repère du plan.

★ Vidéo.

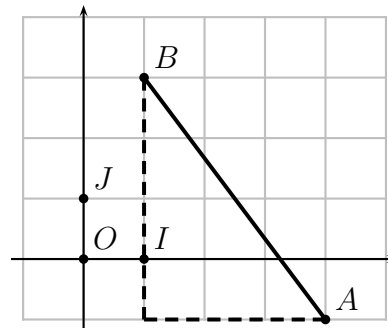
## 3.2 Distance

**Propriété 3.2.** Soient  $A$  et  $B$  deux points de coordonnées respectives  $(x_A, y_A)$  et  $(x_B, y_B)$  dans un repère orthonormé. On a

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

**Exemple :** Soient  $A(4; -1)$  et  $B(1; 3)$  deux points d'un repère orthonormé. La distance entre  $A$  et  $B$  est :

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(1 - 4)^2 + (3 - (-1))^2} \\ &= \sqrt{(-3)^2 + 4^2} \\ &= \sqrt{9 + 16} \\ &= \sqrt{25} \\ &= 5. \end{aligned}$$



★ Vidéo.

## 3.3 Milieu

**Propriété 3.3.** Soient  $A$  et  $B$  deux points de coordonnées  $(x_A, y_A)$  et  $(x_B, y_B)$  d'un repère du plan. Le milieu  $M$  du segment  $[AB]$  a pour coordonnées :

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_B}{2}.$$

**Exemple :** Soient  $A(5, 3)$  et  $B(2, 7)$  deux points d'un repère. Alors les coordonnées du milieu  $M$  de  $[AB]$  sont

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{5 + 2}{2} = 3,5$$

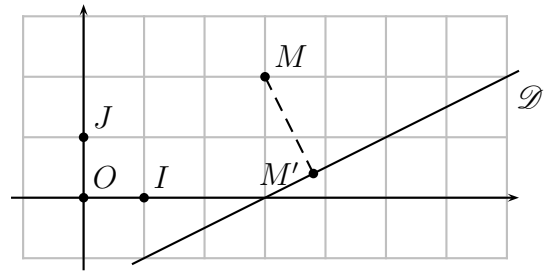
et

$$y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{3 + 7}{2} = 5.$$

★ Vidéo.

### 3.4 Projeté orthogonal

**Définition 3.3.** Soient  $\mathcal{D}$  une droite et  $M$  un point qui n'appartient pas à  $\mathcal{D}$ . On dit que  $M'$  est le **projeté orthogonal** de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  lorsque  $M' \in \mathcal{D}$  et  $(MM')$  est perpendiculaire à  $\mathcal{D}$ .



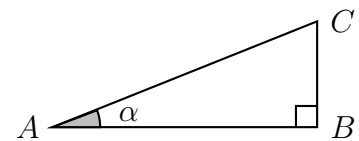
**Propriété 3.4.** Soient  $\mathcal{D}$  une droite et  $M$  un point qui n'appartient pas à  $\mathcal{D}$ . Le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\mathcal{D}$  est le point de  $\mathcal{D}$  le plus proche de  $M$ .

*Démonstration.* Exercice. □

### 3.5 Trigonométrie

**Définition 3.4.** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $B$ . On définit le **cosinus** et le **sinus** de l'angle  $\alpha = \widehat{BAC}$  comme :

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC}.$$

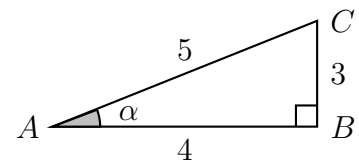


**Remarque :** on a en fait

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{côté adjacent}}{\text{hypothénuse}} \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{\text{côté opposé}}{\text{hypothénuse}}.$$

**Exemple :** Soit  $ABC$  le triangle rectangle ci-contre. On a

$$\cos(\alpha) = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} = 0,8 \quad \text{et} \quad \sin(\alpha) = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} = 0,6.$$



**Propriété 3.5.** Soit  $\alpha$  la mesure d'un angle dans un triangle rectangle. On a :

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1.$$

*Démonstration.* Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $B$  ; on note  $\alpha = \widehat{BAC}$ . Alors

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2 + \left(\frac{BC}{AC}\right)^2 = \frac{AB^2 + BC^2}{AC^2} = \frac{AC^2}{AC^2} = 1,$$

d'après le théorème de Pythagore car  $ABC$  est rectangle en  $B$ . □

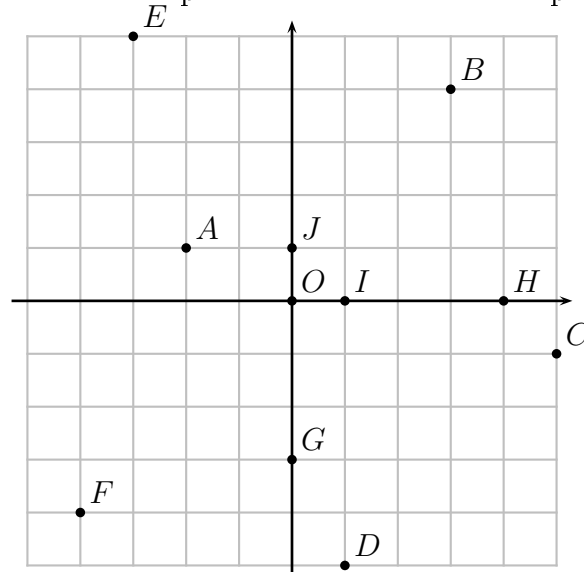
## 3.6 Attendus et savoir-faire

- Lire les coordonnées d'un point dans un repère et y placer un point dont on connaît les coordonnées.
- Calculer le milieu / la distance entre deux points.
- Construire le projeté orthogonal d'un point sur une droite.
- Calculer un cosinus ou un sinus.
- Connaître les propriétés du cosinus et du sinus.

## 3.7 Exercices

### 3.7.1 Démarrage

**Exercice 3.1.** Lire les coordonnées des points ci-dessous dans le repère  $(O; I; J)$ .



**Exercice 3.2.** En reprenant l'exercice 3.1, calculer les distances  $AB$ ,  $BC$  et  $AC$ .

**Exercice 3.3.** En reprenant l'exercice 3.1, calculer les milieux de  $[AB]$ ,  $[BC]$  et  $[AC]$ .

**Exercice 3.4.** Dans un repère orthonormé, placer les points  $A(5;3)$ ,  $B(-1;-2)$  et  $C(3;-1)$  puis construire le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ . Quels sont ses coordonnées approximatives ?

**Exercice 3.5.** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $B$ . Dans chacun des cas, calculer  $BC$  et en déduire  $\cos(\widehat{BAC})$  et  $\sin(\widehat{BAC})$ .

1.  $AB = 3$  et  $AC = 4$ .
2.  $AB = 10$  et  $AC = 15$ .
3.  $AB = 7$  et  $AC = 11$ .

### 3.7.2 Approfondissement

**Exercice 3.6.** Soient  $A(2;4)$ ,  $B(5;-1)$ ,  $C(8;4)$  et  $D(0;-4)$ .

1. Montrer que  $ABC$  est isocèle en  $B$ .
2. Quelle est la nature du triangle  $ABD$  ?

**Exercice 3.7.** On considère les points  $A(4;2\sqrt{3})$  et  $B(-1;3\sqrt{3})$ . Le triangle  $OAB$  est-il équilatéral ? Justifier.

**Exercice 3.8.** Soient  $A(2;4)$ ,  $B(6;3)$ ,  $C(8;1)$  et  $D(4;2)$ .

1. Calculer les coordonnées de  $K$  milieu de  $[AC]$ .
2. Calculer les coordonnées de  $L$  milieu de  $[BD]$ .
3. Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$  ?

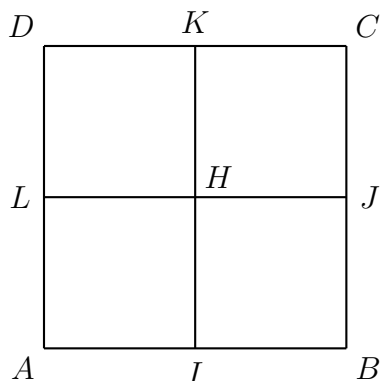
**Exercice 3.9.** Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées de  $D$  tel que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

1.  $A(-1;-1)$ ,  $B(0;-5)$  et  $C(4;3)$ .
2.  $A(0;3)$ ,  $B(8;2)$  et  $C(5;-3)$ .

**Exercice 3.10.** On considère les points  $A(2;4)$ ,  $B(0;-4)$ ,  $C(8;-6)$  et  $D(10;2)$ . Quelle est la nature du quadrilatère  $ABCD$  ? Justifier.

**Exercice 3.11.** On considère le carrés  $ABCD$  et  $I$ ,  $J$ ,  $K$  et  $L$  les milieux respectifs de  $[AB]$ ,  $[BC]$ ,  $[CD]$  et  $[AD]$  comme sur la figure ci-contre. Quel est le projeté orthogonal de :

1.  $K$  sur  $(AB)$  ?
2.  $K$  sur  $(JB)$  ?
3.  $D$  sur  $(LH)$  ?
4.  $H$  sur  $(CD)$  ?
5.  $L$  sur  $(AD)$  ?
6.  $I$  sur  $(AI)$  ?
7.  $C$  sur  $(BD)$  ?
8.  $D$  sur  $(CH)$  ?



**Exercice 3.12. [Démonstration]** Soit  $\Delta$  une droite et  $M$  un point n'appartenant pas à  $\Delta$ . On note  $P$  le projeté orthogonal de  $M$  sur  $\Delta$ . On souhaite montrer que  $P$  est le point de  $\Delta$  le plus proche de  $M$ , pour cela on va comparer la distance  $MP$  avec la distance  $MA$  où  $A$  est un autre point de  $\Delta$  distinct de  $P$ .

1. Faire un croquis représentant la situation.
2. Justifier que l'on a  $MA^2 = MP^2 + AP^2$ .
3. En déduire que  $MA^2 \geq MP^2$ .
4. En conclure que  $MA \geq MP$ .

**Exercice 3.13.** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $C$ . On sait que  $AC = 2\sqrt{2}$  et  $\sin(\widehat{CAB}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ , déterminer  $\cos(\widehat{CAB})$ .

**Exercice 3.14.** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $A$ . On sait que  $BC = 3\sqrt{3}$  et  $\cos(\widehat{ABC}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ , déterminer  $AB$ .

### 3.7.3 Entraînement

**Exercice 3.15.** En reprenant l'exercice 3.1, calculer les distances  $CD, DE, EF, FG, GH, HA, FH, IG, JA$ .

**Exercice 3.16.** En reprenant l'exercice 3.1, calculer les milieux des segments  $[CD], [DE], [EF], [FG], [GH], [HA], [FH], [IG], [JA]$ .

**Exercice 3.17.** Dans chacun des cas suivants, calculer les coordonnées de  $D$  tel que le quadrilatère  $ABCD$  soit un parallélogramme.

1.  $A(2; -3), B(-1; 5)$  et  $C(-3; 0)$ .
2.  $A(1; 1), B(0; -4)$  et  $C(4; 4)$ .

**Exercice 3.18.** Dans chacun des cas suivants, placer les points  $A, B$  et  $C$  dans un repère ortho-normé puis construire le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ . Donner les coordonnées approximatives de ce dernier.

1.  $A(-1; 4), B(3; 2)$  et  $C(4; 5)$ .
2.  $A(1; -4), B(5; -2)$  et  $C(0; 1)$ .
3.  $A(3; -1), B(4; 4)$  et  $C(-2; 0)$ .
4.  $A(-2; -3), B(0; -3)$  et  $C(-6; 0)$ .

**Exercice 3.19.** Soit  $ABC$  un triangle rectangle en  $B$ . Dans chacun des cas, calculer  $\cos(\widehat{BAC})$  et  $\sin(\widehat{BAC})$ .

1.  $AB = 5$  et  $AC = 9$ .
2.  $AB = 8$  et  $AC = 13$ .
3.  $AB = 2$  et  $AC = 6$ .