Padawan 1

Exercice 1. [Cours]

1. Donner la définition d'une relation réflexive.
2. Donner la définition d'une relation d'ordre total.
3. Donner la définition d'un majorant.
4. Donner un exemple pour chacune des définitions ci-dessus.

Exercice 2. Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\leqslant\!\leqslant$ en posant

$$\forall\,(x,y)\in(\mathbb{N}^*)^2\;\; x \leqslant\!\leqslant y \text{ s'il existe } n\in\mathbb{N}^* \text{ tel que } y=x^n.$$

1. Montrer que $\leqslant\!\leqslant$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Est-ce un ordre total ?
3. On considère que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\leqslant\!\leqslant$.
   Soit $A=\{2;\,4;\,16\}$. Déterminer le plus grand élément et le plus petit élément de A.

1. Il faut montrer que $\leqslant\!\leqslant$ est réflexive, antisymétrique et transitive. Chacune de ces propriétés est évidente, $\leqslant\!\leqslant$ est donc une relation d'ordre.
2. Ce n'est pas un ordre total, contre-exemple : 2 et 3.
3. Évident.

Exercice 3. Soient E un ensemble fini non vide et x un élément fixé de E. Les relations $\mathcal{R}$ définies ci-dessous sont-elles des relations d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$?

1. $\forall A,B\in\mathcal{P}(E),\; A\mathcal{R}B \iff A\subset B$.
2. $\forall A,B\in\mathcal{P}(E),\; A\mathcal{R}B \iff x\in A\cap\overline{B}$.
3. $\forall A,B\in\mathcal{P}(E),\; A\mathcal{R}B \iff x\in A\cup\overline{B}$.
4. $\forall A,B\in\mathcal{P}(E),\; A\mathcal{R}B \iff (x\in A=B \text{ ou } x\in A\cap\overline{B})$.

1. $\mathcal{R}$ est évidemment une relation d'ordre (mais pas total).
2. $\mathcal{R}$ n'est pas réflexive car $A\cap\overline{A}=\emptyset$ et donc $x\notin A\cap\overline{A}$. $\mathcal{R}$ n'est donc pas une relation d'ordre.
3. $\mathcal{R}$ est évidemment réflexive mais pas antisymétrique, en effet, si $A\subset B$, on a $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$ sans que $A=B$.
4. Regardons au cas par cas la réflexivité, l'anti-symétrie et la transitivité.
   (a) $\mathcal{R}$ ne peut être réflexive, en effet on a $A\mathcal{R}A \iff x\in A$ et donc tout ensemble inclus dans $\overline{\{x\}}$ ne peut être en relation avec lui-même. Toutefois, tout ensemble contenant x est bien en relation avec lui-même.

(b) Supposons que $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}A$, les cas $x \in A \cap \overline{B}$ et $x \in B \cap \overline{A}$ sont incompatibles, on a donc l'une des deux relations – et donc les deux – qui sont définies par $A = B$. $\mathcal{R}$ est donc antisymétrique.

(c) Supposons $A\mathcal{R}B$ et $B\mathcal{R}C$. Les cas $x \in A \cap \overline{B}$ et $x \in B \cap \overline{C}$ sont incompatibles, on a donc soit $A = B$, soit $B = C$. Si c'est les deux à la fois, on a $A = C$ et donc $A\mathcal{R}C$. Sinon, on a immédiatement que $x \in A \cap \overline{C}$ par l'autre relation et donc $A\mathcal{R}C$.

$\mathcal{R}$ est donc une relation d'ordre sur le sous-ensemble de $\mathcal{E}$ des ensembles contenant x.

Padawan 2

Exercice 4. [Cours]

1. Donner la définition d'une relation symétrique.
2. Donner la définition d'une relation d'ordre partiel.
3. Donner la définition d'un minorant.
4. Donner un exemple pour chacune des définitions ci-dessus.

Exercice 5. Dans $\mathbb{N}^*$, on définit une relation $\sim$ en posant

$$\forall\,(x\,;y) \in (\mathbb{N}^*)^2 \;\; x \sim y \text{ s'il existe } k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } y = kx.$$

1. Montrer que $\sim$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
2. Est-ce un ordre total ?
3. On considère que l'ensemble $\mathbb{N}^*$ est ordonné par la relation $\sim$
   (a) l'ensemble $\mathbb{N}^*$ possède-t-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?
   (b) Soit $A = \{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$. Cet ensemble admet-il un plus grand élément ? Un plus petit élément ?

1. $\sim$ est de façon évidente réflexive, antisymétrique et transitive, c'est donc une relation d'ordre.
2. Ce n'est pas une relation d'ordre total car on ne peut pas comparer 2 et 3.
3. (a) N^* ne possède pas de plus grand élément pour $\sim$, il a toutefois un plus petit élément : 1, en effet, pour $x \in \mathbb{N}^*$, on a $x = x \times 1$ et donc $1 \sim x$.
   (b) A n'admet ni plus petit, plus grand élément puisque certains de ces éléments ne sont pas comparables.

Exercice 6. Soit $(E\,;\leqslant)$ un ensemble ordonné. On définit sur $\mathcal{P}(E)\setminus\{\emptyset\}$ la relation $\sim$ par :

$$X \sim Y \iff (X = Y \text{ ou } \forall x \in X,\; \forall y \in Y \;\; x \leqslant y).$$

$\sim$ est-elle une relation d'ordre ?

La réflexivité et la transitivité sont évidentes. Intéressons-nous à l'anti-symétrie. Supposons que $X \sim Y$ et $Y \sim X$. Si $X = Y$, alors c'est fini. Sinon on a : $\forall x \in X,\; \forall y \in Y \;\; x \leqslant y \wedge y \leqslant x$; ce qui est impossible sauf si $X = Y$ et $\operatorname{card}\left(()\,X\right) = 1$. On en déduit donc que $X = Y$. $\sim$ est une relation d'ordre.

Padawan 3

Exercice 7. [Cours]

1. Donner la définition d'une relation transitive.
2. Donner la définition d'une relation d'équivalence.
3. Donner la définition de la borne supérieure.
4. Donner un exemple pour chacune des définitions ci-dessus.

Exercice 8. Soit E un ensemble, vérifier que la relation $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{P}(E)$ définie par

$$A\mathcal{R}B \iff A = B \text{ ou } A = \overline{B}$$

est une relation d'équivalence.

Évident.

Exercice 9. Soit $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers strictement supérieurs à 2.
On considère la relation $\mathcal{R}$ entre deux éléments de $\mathbb{P}$ définie par : $p\mathcal{R}q \iff \dfrac{p+q}{2} \in \mathbb{P}$. La relation $\mathcal{R}$ est-elle réflexive ? Symétrique ? Transitive ?

$\mathcal{R}$ est réflexive et symétrique de façon évidente. Cherchons un contre-exemple à la transitivité. On a $3\mathcal{R}7$ puisque $\dfrac{3+7}{2} = 5$ et $3\mathcal{R}23$ puisque $\dfrac{23+3}{2} = 13$. Pourtant, $\dfrac{23+7}{2} = 15 \notin \mathbb{P}$, nous n'avons donc pas $7\mathcal{R}23$.

Chevalier

Exercice 10. Soient E un ensemble non vide, $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations dans E la relation composée $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est définie par :

$$\forall (x\,;z) \in E^2, (x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z) \iff (\exists y \in E, (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{S}z)))$$

1. Montrer que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives, alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ l'est aussi.
2. (a) Montrer que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques et $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ alors $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ est symétrique.
   (b) Donner un exemple où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont symétriques et où $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ne l'est pas.
3. (a) Montrer que si $\mathcal{R}$ est antisymétrique et transitive alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ est antisymétrique.
   (b) Donner un exemple où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont antisymétriques et où $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ne l'est pas.
4. (a) Montrer que si $\mathcal{R}$ est transitive alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ l'est aussi.
   (b) Donner un exemple où $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont transitives et où $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ ne l'est pas.
5. Montrer que si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence (resp. d'ordre) alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{R} = \mathcal{R}$

1. Il suffit de prendre $y = x$ dans la définition de $\mathcal{S} \circ \mathcal{R}$ pour avoir la réflexivité.
2. (a) Évident.
   (b) On prend $\mathcal{S}$ définie sur $\left[-\sqrt{2}\,;\sqrt{2}\right]$ par $y\mathcal{S}z \iff z^2 - 1 = 1 - y^2$ et $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \iff y - 1 = 1 - x$. On a alors $x(\mathcal{S} \circ \mathcal{R})z \iff 2 - z^2 = (2-x)^2$ qui n'est clairement pas symétrique.
3. (a) Par définition de $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ et par transitivité, on a

$$x(\mathcal{R} \circ \mathcal{R})z \iff \exists y \in E, (x\mathcal{R}y \wedge y\mathcal{R}z) \Longrightarrow x\mathcal{R}z.$$

   De même, en inversant les rôles de x et z on obtient $z\mathcal{R}x$. Par anti-symétrie de $\mathcal{R}$, en déduit que $x = z$ et que $\mathcal{R} \circ \mathcal{R}$ est antisymétrique.
   (b) On considère $\mathcal{R}$ définie par $x\mathcal{R}y \iff y = -x$. $\mathcal{R}$ est clairement anti-symétrique mais pas transitive. On a $x(\mathcal{R} \circ \mathcal{R})z \iff z = x$ qui n'est évidemment pas antisymétrique.
4. (a) Évident.
   (b)
5. Évident.