Padawan 1

Exercice 1. [Cours] Énoncer et démontrer la formule du binôme de Newton.

En développant $(x+y)^n$ on obtient une somme de monômes de la forme $x^k y^j$ où k et j représente le nombre de fois où x et y ont été choisis en développant. On a donc $j = n - k$ puisqu'en ne choisissant pas k x on a choisi $n-k$ y. Enfin, puisqu'il y a $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$ façons de choisir x, le monôme $x^k y^{n-k}$ doit être multiplié par le coefficient binomial $\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)$.

Exercice 2. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

On a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n.$$

Exercice 3. [Permutations de $[\![1;12]\!]$]

1. Combien y a-t-il de bijections de $[\![1;12]\!]$ dans lui même ?
2. Combien y a-t-il de bijections de $[\![1;12]\!]$ dans lui même possédant :
   (a) la propriété : n est pair $\implies$ $f(n)$ est pair ?
   (b) la propriété : n est divisible par 3 $\implies$ $f(n)$ est divisible par 3 ?
   (c) les deux propriétés précédentes à la fois ?
   (d) Reprendre les questions précédentes avec **application** à la place de **bijection**.

1. L'ensemble des permutations / bijections de $[\![1\,;n]\!]$ a pour cardinal $n!$ donc il y a $12!$ bijections.
2. (a) Pour construire une bijection conservant la parité, on a 6 possibilités pour l'image de 2, 5 pour l'image de 4... et donc 6! possibilités pour les pairs. Puisqu'il faut aussi donner une image aux impairs (qui sont forcément impaires), on en déduit que l'on a $(6!)^2$ possibilités en tout. On a $6^6 \times 12^6$ possibilités pour les applications puisque cette fois-ci, les impairs n'ont pas forcément une image impaire (donc 12 possibilités pour chacun d'entre eux).
   (b) Par un raisonnement similaire, on a 4! pour les multiples de 3 et donc 8! pour les autres, d'où $4! \times 8!$. $4^4 \times 12^8$ pour les applications.
   (c) $2!2!4!4!$ et $2^2 \times 4^2 \times 6^4 \times 12^4$.

Exercice 4. Soient n et m deux entiers. Combien y a-t-il de fonctions strictement croissantes de $[\![1\,;n]\!]$ dans $[\![1;m]\!]$? **Bonus** : et de fonctions croissantes au sens large ?

Si $m < n$ alors il n'y a aucune possibilité. Si $m = n$ alors il n'y a qu'une seule possibilité : l'identité. Si $m > n$, cela revient à un tirage simultané dans $[\![1\,;m]\!]$ donc une n-combinaison qui sera strictement croissante. On a donc $\dbinom{m}{n}$ fonctions possibles.

Exercice 5. Montrer que $\dbinom{a+b}{n} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \dbinom{a}{k}\dbinom{b}{n-k}$.

Padawan 2

Exercice 6. [Cours] Soient n, k des entiers naturels. Montrer que

1. Pour $k \leq n$: $\displaystyle\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\displaystyle k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

1. Pour se donner une k-combinaison de $[\![1\,;n]\!]$ – pour laquelle on a $\displaystyle\binom{n}{k}$ possibilités –, on peut se donner son complémentaire qui est une $n-k$-combinaison et donc pour lequel on a $\displaystyle\binom{n}{n-k}$ possibilités.
2. De combien de manières peut-on former à partir n personnes une équipe de k d'entre elles dont un capitaine ? On va dénombrer ces équipes de deux manières, ce dont découlera aussitôt le résultat.
   — On peut commencer par choisir les k membres de l'équipe pour lesquels on a $\displaystyle\binom{n}{k}$ possibilités puis choisir parmi eux un capitaine pour lequel on a alors k possibilités. Cela fait donc en tout $\displaystyle k\binom{n}{k}$ possibilités.
   — On peut aussi commencer par choisir un capitaine pour lequel on a n possibilités puis les $k-1$ joueurs restant pour lesquels on a $\displaystyle\binom{n-1}{k-1}$ possibilités, ce qui fait en tout $\displaystyle n\binom{n-1}{k-1}$ possibilités.

Exercice 7. Calculer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n^k}$.

On a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k 1^{n-k} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Exercice 8. [Petit problème du quotidien] On doit placer autour d'une table ronde un groupe de $2n$ personnes, n hommes et n femmes, qui constituent n couples. Combien existe-t-il de dispositions...

1. au total ?
2. en respectant l'alternance des sexes ?
3. sans séparer les couples ?
4. en remplissant les deux conditions précédentes ?

1. $(2n)!$.
2. On a $n!$ possibilités pour les femmes en laissant vide une place sur deux et de même pour les hommes donc $n! \times n!$ (cela revient à une bijection respectant la parité).
3. On a $n!$ possibilité pour les couples. Au sein de chaque couple, on a 2 possibilités pour placer l'homme et la femme, donc en tout 2^n possibilités. Enfin, on a deux possibilités de départ, soit un couple en positions 1 et 2, soit en position 2 et 3 (on finit alors en n et 1). On a donc $n! \times 2^n \times 2$ possibilités.
4. $n! \times 2 \times 2$, c'est le même raisonnement qu'au cas précédent sauf que le choix du premier couple détermine tous les autres.

Exercice 9. On trace n droites au tableau, deux à deux non parallèles, et trois à trois non concourantes. En combien de régions divisent-elles le tableau ? Combien y a-t-il de triangles sur la figure ?

La n-ième droite coupe les $n-1$ précédentes, donc passe par n régions et les coupe en deux, donc elle ajoute n régions. De plus, on a 1 région pour 0 droite, donc le nombre de régions est : $1+1+2+3+\cdots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}+1$.
Il y a 3 parmi n triangles (car chaque triplet de droites forme un triangle).

Exercice 10. [Formule de Legendre] Combien y a-t-il de zéros à la fin de l'écriture décimale de :

1. 10 ! ?
2. 100 ! ?
3. 1000 ! ?
4. 2020 ! ?

Padawan 3

Exercice 11. [Cours] Soient n, k des entiers naturels. Montrer que

1. Pour $k \leq n$: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

1. Pour se donner une k-combinaison de $[\![1\,;n]\!]$ – pour laquelle on a $\binom{n}{k}$ possibilités –, on peut se donner son complémentaire qui est une $n-k$-combinaison et donc pour lequel on a $\binom{n}{n-k}$ possibilités.
2. Il existe deux types de $(k+1)$-combinaisons de $[\![1\,;n+1]\!]$, celles qui contiennent $n+1$ et les celles qui ne le contiennent pas.
   — Si la combinaison contient $n+1$, alors il reste $\binom{n}{k+1}$ possibilités pour choisir les k autres valeurs.
   — Si la combinaison ne contient pas $n+1$, on choisit nos k valeurs parmi n valeurs (et non $n+1$ puisqu'on l'a retiré) et on a donc $\binom{n}{k+1}$ possibilités.

Exercice 12. Simplifier l'expression $2^n \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{n}{k}}{2^k}$.

On a

$$2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{2^k} = 2^n \left(1 + \frac{1}{2}\right)^n = 3^n.$$

Exercice 13. [Nombre d'opérations]

1. Combien existe-t-il de lois de compositions internes sur un ensemble E à n éléments ?
2. Combien sont commutatives ?
3. Combien ont un élément neutre ? C'est-à-dire, en notant $\star$ la loi de composition interne qu'il existe un élément e tel que pour tout élément a on ait $a \star e = e \star a = a$.
4. Combien sont commutatives et ont un élément neutre ?

1. À chaque couple de E^2 – n^2 possibilités – on associe un élément de E donc n^{n^2} possibilités.
2. Comme la loi est commutative, on a $x \star y = y \star x$ et il suffit de donc de donner une image aux $x \star y$ pour $x \neq y$: on a $\frac{n(n-1)}{2}$ possibilités : cela revient à compter le nombre d'éléments sous la diagonale d'une table de composition $n \times n$; et aux $x * x$: n possibilités. On adonc $n^n \times n^{\frac{n(n-1)}{2}} = n^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

3. Il faut d'abord choisir l'élément neutre donc n possibilités. En reprenant l'idée de la table de composition, si on met l'élément neutre e en première position des lignes et colonnes, alors la première ligne et la première colonne sont fixées. On a donc une sous-table de taille $(n-1)^2$ pour laquelle chacune des cases a n possibilités. On a donc $n^{(n-1)^2}$ possibilités.
4. En reprenant le raisonnement de 3., on remplit la sous-table de taille $n-1$ de la façon de 2., on a donc $nn^{n-1}n^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} = nn^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Exercice 14. [Suite de Fibonacci] Soit $u_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n-1-p}{p}$. Montrer que $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

Comme $\displaystyle\binom{n-1-p}{p} = 0$ dès que $n-1-p < p$, les termes de la somme sont en fait nuls dès que $p > \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$ (ou que $p < 0$). On a donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \sum_{p=0}^{n+2} \binom{n+1-p}{p} \\ &= \sum_{p=0}^{n+2} \binom{n-p}{p-1} + \sum_{p=0}^{n+2} \binom{n-p}{p} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n-1-k}{k} + \sum_{p=0}^{n+1} \binom{n-p}{p} \\ &= u_n + u_{n+1}. \end{aligned}$$

Exercice 15. [Parité de $\binom{n}{k}$] Soit $p \in \mathbb{N}^*$, et $n = 2^p$.

1. Soit $k \in [\![1; n-1]\!]$. Vérifier que $k\displaystyle\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.
2. En déduire que $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $\displaystyle\binom{n}{k}$ est pair.
3. En déduire que $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $\displaystyle\binom{n-1}{k}$ est impair.

1. Cours.
2. Puisque n est pair, le membre de gauche de l'égalité de 1. l'est aussi. Donc $\forall k \in [\![1; n-1]\!]$, $k\displaystyle\binom{n}{k}$ est pair, on en déduit que $\displaystyle\binom{n}{k}$ aussi.
3.