Padawan 1

Exercice 1. [Cours] Soient E et F deux ensembles finis non vides, et f une fonction de E vers F. Compléter et démontrer la propriété suivante : si $\operatorname{card}(E) > \operatorname{card}(F)$ alors ...

... alors f n'est pas injective.

Supposons f injective de E dans F. On a $f(E) \subset F$ donc $f(E)$ est fini et $\operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(F)$. Par ailleurs, f est surjective de E dans $f(E)$ et donc bijective. On en déduit que E est fini et $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(f(E)) \leq \operatorname{card}(F)$.

Exercice 2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n(n+1)(7n+2)$ est divisible par 6. Même chose pour $n(n+1)(8n+1)$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le produit $n(n+1)$ est toujours multiple de 2. Par ailleurs, soit n ou $n+1$ est multiple de 3, auquel cas $n(n+1)(7n+2)$ est multiple de 6, soit ni n ni $n+1$ n'est multiple de 3. Dans ce dernier cas, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 3k+1$ et $n+1 = 3k+2$, on a alors $7n+2 = 3(7k+3)$ qui est donc multiple de 3. On en déduit que $n(n+1)(7n+2)$ est multiple de 6. Même raisonnement avec $n(n+1)(8n+1)$.

Exercice 3. Soit la suite définie par $u_0 = -1$, $u_1 = 3$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2}.$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

On a $u_0 = -1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 7$, $u_3 = 11$ et $u_4 = 15$. Montrons par récurrence forte que $u_n = -1 + 4n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation est déjà faite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = -1 + 4n$ et $u_{n+1} = -1 + 4(n+1) = 3 + 4n$. On a alors

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n = 2(3+4n) - (-1+4n) = -1 + 4(n+2).$$

On a donc l'hérédité. On a donc montré que $u_n = -1 + 4n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 4. Démontrer par récurrence la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ [(n+1)!]^{n+1} \leq \prod_{k=0}^{n} (2k+1)! = 1! \times 3! \times \cdots \times (2n+1)!.$$

La propriété est évidemment vraie pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vraie au rang $\in \mathbb{N}^*$ et montrons qu'elle l'est au rang $n+1$. On a par hypothèse de récurrence

$$[(n+2)!]^{n+2} = [(n+1)!]^{n+1}(n+1)!(n+2)^{n+2} \leq \left[\prod_{k=0}^{n}(2k+1)!\right](n+1)!(n+2)^{n+2}.$$

On a

$$(2n+3)! = (n+1)!\underbrace{(n+2)\times\cdots\times(2n+3)}_{n+2 \text{ termes } \geq n+2} \geq (n+1)!(n+2)^{n+2}.$$

On en déduit que

$$[(n+2)!]^{n+2} \leq \prod_{k=0}^{n+1}(2k+1)!.$$

L'hérédité est donc démontrée et la propriété est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 5. Soit $x\in\mathbb{R}^*$ tel que $x+\dfrac{1}{x}\in\mathbb{N}$. Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}, x^n+\dfrac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$. Trouver un tel x, avec $x\notin\mathbb{Z}$.

Montrons par récurrence d'ordre 2 que $\forall n\in\mathbb{N},\ x^n+\dfrac{1}{x^n}\in\mathbb{Z}$. Cette propriété est vraie pour $n=1$ par hypothèse. Montrons que $x^2+\dfrac{1}{x^2}\in\mathbb{Z}$. On a

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2 = x^2+2+\frac{1}{x^2}.$$

On en déduit que $x^2+\dfrac{1}{x^2}\in\mathbb{Z}$ comme produit et somme d'entiers.

Supposons la propriété vraie aux rangs n et $n+1$. On a

$$\left(x+\frac{1}{x}\right)\left(x^n+\frac{1}{x^n}\right) = x^{n+2}+\frac{1}{x^{n+1}}+x^{n+1}+\frac{1}{x^{n+2}}.$$

Le membre de gauche est un entier en tant que produit d'entiers par hypothèses de récurrence. On en déduit que $\dfrac{1}{x^{n+2}}+x^{n+2}\in\mathbb{Z}$ comme somme d'entiers.

Pour trouver un $x\notin\mathbb{Z}$, on considère $k\in\mathbb{N}$ tel que $x+\dfrac{1}{x}=k$ i.e. $x^2-kx+1=0$. On a $\Delta=k^2-4$. L'équation précédente admet des solutions si et seulement si $\Delta\geq 0$. Pour $k=\pm 2$, on a $x\in\mathbb{Z}$, en prenant $k=3$, on obtient un $x\notin\mathbb{Z}$.

Padawan 2

Exercice 6. [Cours] Soient E et F deux ensembles finis non vides, et f une fonction de E vers F. Compléter et démontrer la propriété suivante : si $\operatorname{card}(E) < \operatorname{card}(F)$ alors ...

... alors f n'est pas surjective.

Supposons f surjective. On a $f(E) = F$ donc $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(F)$. Or $\operatorname{card}(F(E)) \leq \operatorname{card}(E)$, donc, $\operatorname{card}(F) \leq \operatorname{card}(E)$.

Exercice 7. Soient a, b deux réels, et une suite définie par u_0 et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}$.

On procède par récurrence ; la propriété est évidente pour $n = 1$. Supposons qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{N},\ n > 1$. On a par hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= a\left(a^n u_0 + b\sum_{k=1}^{n} a^{n-k}\right) + b \\ &= a^{n+1} + b\sum_{k=1}^{n} a^{n+1-k} + ba^{n+1-(n+1)} \\ &= a^{n+1} + b\sum_{k=1}^{n+1} a^{n+1-k}. \end{aligned}$$

On en déduit que la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Montrer que si N est la somme de n entiers impairs consécutifs, alors N n'est pas premier.

N étant la somme de n entiers impairs consécutifs, il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que

$$N = \sum_{k=p}^{n+p-1} 2k + 1 = 2\sum_{k=p}^{n+p-1} k + n.$$

$\sum_{k=p}^{n+p-1} k$ est la somme des termes d'une suites arithmétiques donc

$$\sum_{k=p}^{n+p-1} k = n\frac{p + n + p - 1}{2} = n\frac{n + 2p - 1}{2}.$$

On en déduit que

$$N = n(n+2p-1) + n = n(n+2p).$$

On a obtenu une factorisation de N dont les facteurs sont supérieurs à 2, N ne peut donc pas être premier.

Exercice 9. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}\left(\displaystyle\sum_{i=0}^{n} u_i^2\right)$.
Tous les termes de cette suite sont-ils des entiers naturels ?

En testant les premières valeurs de (u_n), on observe qu'elles sont toutes égales à 1. Montrons par récurrence forte que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. C'est évidemment vrai pour u_0. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que pour tout $k \in [\![0\,;n]\!]$, on ait $u_k = 1$. On a alors

$$u_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} 1 = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

On a donc montré que $u_n = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 10.

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un couple unique $(a_n\,;b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$.
2. Calculer $a_n^2 - 2b_n^2$.

1. On procède par récurrence. La propriété est vraie au rang 0 avec $(a_0\,;b_0) = (1\,;0)$ l'unique couple tel que $a_0 + b_0\sqrt{2} = (1+\sqrt{2})^0$. Supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un unique $(a_n\,;b_n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $(1+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$, alors on a

$$(1+\sqrt{2})^{n+1} = (a_n + b_n\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = a_n + 2b_n + (a_n+b_n)\sqrt{2}.$$

   On pose alors $a_{n+1} = a_n + 2b_n$ et $b_{n+1} = a_n + b_n$, ces relations déterminent uniquement le couple $(a_{n+1}\,;b_{n+1}) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant ainsi la propriété. La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2.

Padawan 3

Exercice 11. [Cours] Soient E et F deux ensembles finis non vides, et f une fonction de E vers F. Compléter et démontrer la propriété suivante : si $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$ alors ...

... f est injective si et seulement si elle est surjective.

On suppose que $E = \{x_1 ; \dots ; x_n\}$ et $\operatorname{card}(E) = \operatorname{card}(F)$. f est injective si et seulement si les $f(x_i)$ sont deux à deux distincts, si et seulement si $\operatorname{card}(f(E)) = \operatorname{card}(E)$ et donc si et seulement si $cardF(E) = \operatorname{card}(F)$, autrement dit, si et seulement si f est surjective.

Exercice 12. Montrer par récurrence la propriété :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ \sum_{k=0}^{n} k! \leq (n+1)!.$$

La propriété est évidemment vraie au rang 0. Supposons qu'elle est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a par hypothèse de récurrence

$$\sum_{k=0}^{n+1} k! = \sum_{k=0}^{n} k! + (n+1)! \leq (n+1)! + (n+1)! \leq (n+2)!.$$

La propriété est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - u_{n+2}}{2}$$

Déterminer l'expression de u_n en fonction de n.

On a $u_0 = 0$, $u_1 = -1$, $u_2 = 2$, $u_3 = -3$ et $u_4 = 4$. Montrons par récurrence forte que $u_n = (-1)^n n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'initialisation est déjà faite. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $u_n = (-1)^n n$ et $u_{n+1} = (-1)^{n+1}(n+1)$. On a alors

$$u_{n+2} = -(2u_{n+1} + u_n) = -(-1)^{n+1}(2(n+1) - n) = (-1)^{n+2}(n+2).$$

On a donc l'hérédité. On a donc montré que $u_n = (-1)^n n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, montrer qu'il existe n entiers consécutifs non premiers.

On considère la suite des n entiers consécutifs

$$([n+1]! + 2 ; ... ; [n+1]! + n + 1) .$$

Chacun des termes de cette suite est divisible par respectivement 2, 3,..., $n+1$ et donc aucun d'eux n'est premier.

Exercice 15. Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par son premier terme $u_0 = 1$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Exprimer le terme général en fonction de n.

On observe que $u_1 = 1$, $u_2 = 2$, $u_3 = 4$ et $u_4 = 8$. Montrons par récurrence que $u_n = 2^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. La propriété est vraie pour $n = 1$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons la propriété vraie au rang n. On a par hypothèse de récurrence

$$u_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} u_k + u_n = 2u_n = 2^n.$$