Padawan 1

Exercice 1. [Cours]

1. Montrer que la composée de deux injections (resp. surjections) est une injection (resp. surjection).
2. Qu'en est t-il des bijections ?

Exercice 2. Donner un exemple de fonction injective non surjective.

L'exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit E un ensemble, et A une partie non vide de E telle que $A \neq E$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cup A \end{array}$$

f est elle injective ? Surjective ?

f n'est clairement pas injective, n'importe quels ensembles inclus dans A mais différents fournissent un contre-exemple. f n'est pas non plus surjective, en effet $A \subset f(X)$, un élément de $\mathcal{P}(E)$ dans lequel n'est pas inclus A n'a donc pas d'image réciproque par f.

Exercice 4. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \to & \mathbb{R} \setminus \{3\}, \\ x & \mapsto & \dfrac{3x+1}{x-3}. \end{array}$$

est bijective, et déterminer son application réciproque.

Pour tout $y \in \mathbb{R}\setminus\{3\}$, on a $x = \dfrac{3y+1}{y-3}$. Cette relation détermine uniquement x en fonction de y, f est donc bijective.

Exercice 5. Soit E et F deux ensembles, et f une application de E dans F.

1. Montrer que pour toute partie A de E, $A \subset f^{-1}(f(A))$.
2. Montrer que f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$.

1. Il suffit d'écrire la définition de $f^{-1}(f(A))$ pour que cela apparaisse comme évident.
2. Supposons que f est injective et montrons que l'on a $A = f^{-1}(f(A))$. Soit $x \in f^{-1}(f(A))$, il existe donc $a \in A$ tel que $f(x) = f(a)$. Puisque f est injective, on en déduit que $x = a$ et donc que $f^{-1}(f(A)) \subset A$. L'autre inclusion ayant été établie à la question précédente, on a l'égalité.

   Supposons maintenant que $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, $A = f^{-1}(f(A))$ et montrons que f est injective. Soient x_1 et x_2 tels que $f(x_1) = f(x_2)$. On a donc $x_2 \in f^{-1}(f(\{x_1\})) = \{x_1\}$, i.e. $x_1 = x_2$. f est donc injective.

Padawan 2

Exercice 6. [Cours]

1. Montrer que $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective.
2. Montrer que $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective.

Exercice 7. Donner un exemple de fonction surjective non injective.

La fonction carré de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$.

Exercice 8. Soit E un ensemble, et A une partie non vide de E telle que $A \neq E$. On considère l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{P}(E) \\ X & \mapsto & X \cap A \end{array}$$

h est elle injective ? Surjective ?

f n'est clairement pas injective, n'importe quels ensembles contenant A mais différents fournissent un contre-exemple. f n'est pas non plus surjective, en effet $f(X) \subset A$, un élément de $\mathcal{P}(E)$ qui n'est pas inclus A n'a donc pas d'image réciproque par f.

Exercice 9. Soit f une application de E dans F, et g une application de F dans E. Montrer que

$$(f \circ g \circ f \text{ est bijective }) \Rightarrow (f \text{ et } g \text{ sont bijectives}).$$

En appliquant la propriété du cours (cf exercice ci-dessus) « $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective » avec $f \circ g$ à la place de g, on en déduit que f est injective. De même, en utilisant « $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective » avec $g \circ f$ à la place de f, on en déduit que f est surjective. f est donc bijective. On note $a = f \circ g \circ f$, comme f est bijective, on a

$$f^{-1} \circ a = g \circ f \qquad \text{et} \qquad a \circ f^{-1} = f \circ g.$$

La composée de deux applications bijectives étant bijective, on en déduit que $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bijectives. En appliquant alors à nouveau les propriétés « $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective » et « $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective », on en déduit que g est bijective.

Exercice 10. Soit l'application :

$$f : \left\{ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x\,;y) & \mapsto & (x+y\,;xy) \end{array} \right.$$

1. Montrer que f n'est pas surjective.
2. Est elle injective ?

1. $(0\,;a)$ n'a pas d'antécédent par f quelque soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. En effet, pour avoir $x+y=0$, il faut $x=-y$ ce qui implique $xy = -y^2 \leq 0$.
2. f n'est pas injective car elle est symétrique : $\forall (x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x\,;y) = f(y\,;x)$.

Padawan 3

Exercice 11. [Cours]
Soit f fonction de E vers F, et g fonction de F vers E. Montrer que

$$(g \circ f = \mathrm{Id}_E \text{ et } f \circ g = \mathrm{Id}_F) \Rightarrow (f \text{ bijective, et } g = f^{-1}).$$

Exercice 12. Donner un exemple de fonction bijective dont les ensembles de départ et d'arrivés sont différents.

L'exponentielle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercice 13. On considère l'application $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par :

$$g(n) = \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ est pair,} \\ \dfrac{n-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Montrer que g est surjective non injective.

$g(2) = g(3)$ donc g n'est pas injective. Montrons que g est surjective : soit $y \in \mathbb{N}$, pour $n = 2y$, on a $y = g(n)$ et donc g est surjective.

Exercice 14. On considère l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :

$$f(x\,;y) = (x - 4y\,; 2x + 3y).$$

1. Montrer que f est bijective.
2. Déterminer $f^{-1}(\Delta)$, où $\Delta = \{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2,\ x + 2y = 1\}$.

1. On peut soit montrer que f est injective et surjective à l'aide des définitions, soit regarder la matrice associée à l'application linéaire. Montrer que f est surjective revient à poser un système 2×2 et à l'inverser par la méthode du pivot de Gauss ; ce qui prouve en plus la bijectivité et donne l'application réciproque de f :

$$f^{-1}(X\,;Y) = \left(\frac{9X+Y}{11}\,;\frac{-2X+Y}{11}\right).$$

2. Pour déterminer $f^{-1}(\Delta)$, on remarque que pour $(X\,;Y) \in \Delta$, on a

$$f^{-1}(1-2Y\,;Y) = \left(\frac{9-17Y}{11}\,;\frac{-2+5Y}{11}\right).$$

On en déduit que $(x\,;y) = f^{-1}(X\,;Y)$ vérifie $x + \frac{17}{5}y = \frac{1}{5}$. On a donc

$$f^{-1}(\Delta) = \left\{(x\,;y) \in \mathbb{R}^2 \;/\; x + \frac{17}{5}y = \frac{1}{5}\right\}.$$

Exercice 15. Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f \circ f(x) - 2f(x) = x$. Montrer que f est bijective, et déterminer son application réciproque.

L'injectivité est évidente. Montrons que f est surjective. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. On a

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff f(y) = f \circ f(x) \quad \text{car } f \text{ est injective} \\ &\iff f(y) = x + 2f(x) \\ &\iff f(y) = x + 2y \\ &\iff x = f(y) - 2y. \end{aligned}$$

Pour x défini par $x = f(y) - 2y$, on a donc $y = f(x)$, autrement dit f est surjective. On en déduit que f est bijective.

Puisque l'on a $[f - 2\mathrm{Id}] \circ f = \mathrm{Id}$, on en déduit que $f^{-1} = f - 2\mathrm{Id}$.

Chevalier

Exercice 16. Soit E un ensemble. En considérant l'ensemble $A = \{x \in E \ ; \ x \notin f(x)\}$, montrer qu'il n'existe pas d'application f surjective de E dans $\mathcal{P}(E)$

Exercice 17. Soit f une application injective de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$, telle que $f(n) \leq n \ \forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $f = Id_{\mathbb{N}}$