Padawan 1

Exercice 1. [Cours] Énoncer et démontrer la propriété d'Archimède.

$\mathbb{R}$ vérifie la **propriété d'Archimède** : pour tout $(x\,;y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, $\exists n \in \mathbb{N}^*,\ y < nx$.

Soient $(x\,;y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Supposons que l'on ait pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$ $nx \leq y$. On pose $A = \{nx,\ n \in \mathbb{N}^*\}$, A est non vide et majorée, elle admet donc un plus grand élément M. On a donc $M \leq y$ et il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{M}{2} \leq kx \leq M$, donc tel que $M \leq (2k)x$; or $(2k)x \in A$, on a donc une contradiction.

Exercice 2. Soit $a \in \mathbb{R}$, que dire de la parité de l'entier $E\left(a+\dfrac{1}{2}\right) + E\left(a-\dfrac{1}{2}\right)$?

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, $E\left(a+\dfrac{1}{2}\right)$ et $E\left(a-\dfrac{1}{2}\right)$ sont deux entiers successifs, leur somme est donc impaire.

Exercice 3. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = E(2x) - 2E(x)$.

1. Calculer $f(x)$ pour $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right[$ puis pour $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right[$.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R} : 0 \leqslant E(2x) - 2E(x) \leqslant 1$.

1. Pour $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right[$, on a clairement $E(2x) = E(x) = 0$ et donc $f(x) = 0$. Pour $x \in \left[\dfrac{1}{2}\,;1\right[$, on a clairement $E(x) = 0$ et $E(2x) = 1$, d'où $f(x) = 1$.
2. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on étudie le cas de l'intervalle $[n\,;n+1[$ en considérant $n + x$ avec $x \in \left[0\,;\dfrac{1}{2}\right[$ puis $\left[\dfrac{1}{2}\,;1\right[$. Comme $E(x+n) = E(x) + n$, on en déduit que $f(x) = 0$ sur $\left[n\,;n+\dfrac{1}{2}\right[$ puis que $f(x) = 1$ sur $\left[n+\dfrac{1}{2}\,;n+1\right[$, ce qui donne le résultat.

Exercice 4. Soit $A \subset \mathbb{R}$ telle que :

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $\exists a, b \in A$ tels que $a < x < b$.
2. $\forall a, b \in A$, $\dfrac{a+b}{2} \in A$.

Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Montrons qu'il existe un élément de A dans $]x-\epsilon\,;x+\epsilon[$. Par hypothèse, on sait qu'il existe $(a\,;b) \in A^2$ tel que $a < x < b$. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} a_0 = a, \\ a_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{si} \quad \dfrac{a_n+b_n}{2} \leq x, \\ a_n & \text{sinon,} \end{cases} \end{cases} \qquad \begin{cases} b_0 = b, \\ b_{n+1} = \begin{cases} b_n & \text{si} \quad \dfrac{a_n+b_n}{2} \leq x, \\ \dfrac{a_n+b_n}{2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{cases}$$

On construit ainsi par récurrence des suites (a_n) et (b_n) s'approchant, intuitivement, de x par dichotomie. Par définition de (a_n) et (b_n), on a $a_n,\, b_n \in A$, $a_n < b_n$ et $x \in [a_n\,;b_n]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la longueur de l'intervalle $[a_{n+1}\,;b_{n+1}]$ est la moitié de celle de l'intervalle $[a_n\,;b_n]$:

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}.$$

La suite $(b_n - a_n)$ est donc géométrique de raison $\frac{1}{2}$: $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$.

Pour n suffisamment grand, on a alors $\frac{b-a}{2^n} < \epsilon$ et donc $[a_n\,;b_n] \subset \,]x-\epsilon\,;x+\epsilon[$. On en déduit que $]x-\epsilon\,;x+\epsilon[$ contient un élément de A, autrement dit A est dense dans $\mathbb{R}$.

Padawan 2

Exercice 5. [Cours] Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \exists ! n \in \mathbb{Z}, n \leqslant x < n+1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si x est entier, c'est terminé. Supposons que x ne l'est pas.

Supposons $x \geq 0$. Puisque $\mathbb{R}$ est archimédien, on sait que pour tout $a > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x < na$. Appliqué à $a = 1$, on a $x < n$. L'ensemble des entiers naturels strictement supérieurs à x est donc non vide, il contient donc un plus petit élément (en tant que sous-partie de $\mathbb{N}$) que l'on note p. On a donc $x < p$ et $p - 1 \leq x$ par définition de p. On a donc l'existence de la partie entière.

Si $x \leq 0$, on applique le raisonnement précédent à $-x$. On a alors

$$\lfloor -x \rfloor \leq -x < \lfloor -x \rfloor + 1$$

et donc

$$-\lfloor -x \rfloor - 1 < x \leq -\lfloor -x \rfloor .$$

On pose alors $\lfloor x \rfloor = -\lfloor -x \rfloor - 1$.

Pour l'unicité, on considère n_1 et n_2 deux entiers naturels vérifiant la propriété de la partie entière et on montre qu'ils sont égaux.

Exercice 6. Montrer que l'ensemble $C = \{r^3 ; r \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Sans les suites : Soient $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, montrons qu'il existe $c \in C$ tel que $c \in \,]y_1\,;y_2[$.

Comme le fonction cube est bijective, ils existent $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tels que $y_i = x_i^3$, $i \in \{1\,;2\}$. Par ailleurs, $\mathbb{Q}$ étant dense dans $\mathbb{R}$, on a l'existence d'un $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q \in \,]x_1\,;x_2[$. Puisque la fonction cube est strictement croissante, on a alors $c = q^3 \in x_1^3 x_2^3$, i.e. l'existence d'un $c \in \,]y_1\,;y_2[$.

Avec les suites : Soit $y \in \mathbb{R}$, la fonction cube étant bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $y = x^3$. Par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe $(x_n) \subset \mathbb{Q}$ convergeant x, ainsi, $x_n^3 \to x^3 = y$. On a donc une suite de C convergeant vers y, C est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Montrer que $\forall\, m, n \in \mathbb{Z},\ E\left(\dfrac{n+m}{2}\right) + E\left(\dfrac{n-m+1}{2}\right) = n$.

On raisonne sur la parité de $n+m$ et $n-m$ en remarquant qu'ils ont la même parité. S'ils sont tous les deux pairs, on a

$$\begin{cases} n+m = 2k_1, & k_1 \in \mathbb{Z}, \\ n-m = 2k_2, & k_2 \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Ce système donne que $n = k_1 + k_2$ et donc que

$$E\left(\frac{n+m}{2}\right) + E\left(\frac{n-m+1}{2}\right) = k_1 + k_2 = n.$$

On raisonne de la même façon dans le cas de l'imparité.

Exercice 8. Montrer que la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k}$ est décroissante.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en effectuant un changement d'indice dans la somme définissant u_{n+1}, on obtient

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{n+1+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+2} \frac{1}{n+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} \\
&= \frac{(2n+1)n + (2n+2)n - (2n+1)(2n+2)}{n(2n+1)(2n+2)} \\
&= \frac{-3n-2}{n(2n+1)(2n+2)}
\end{aligned}$$

On en déduit que (u_n) est strictement décroissante.

Padawan 3

Exercice 9. [Cours] Montrer que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Montrons que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\epsilon > 0$. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{1}{n} \leq \epsilon$, $n = \left\lfloor \frac{1}{\epsilon} \right\rfloor + 1$ par exemple. On pose $k = \lfloor nx \rfloor$, on a alors $k \leq nx \leq k+1$ et donc

$$\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k}{n} + \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} + \epsilon.$$

On pose $r = \frac{k}{n}$ qui est rationnel, on a donc $|x - r| \leq \epsilon$. $\mathbb{Q}$ est donc dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$ et $n \geqslant 1$, on a : $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}
E(x) \leq & x < E(x) + 1 \\
nE(x) \leq & nx < n(E(x) + 1) \\
nE(x) \leq & E(nx) < n(E(x) + 1) \\
E(x) \leq & \frac{E(nx)}{n} < E(x) + 1
\end{aligned}$$

On en déduit que $E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Exercice 11. Soient α réel avec $\alpha > 1$ et la fonction f_α de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que :

$$f_\alpha(x) = E(\alpha x).$$

1. Montrer que f_α est injective.
2. Déterminer $\mathrm{Im}(f_{1,5})$

1. Soient x_1 et x_2 dans N^* tels que $f_\alpha(x_1) = f_\alpha(x_2)$. On a alors $E(\alpha x_1) \leq \alpha x_{1,2} < E(\alpha x_1) + 1$ et donc
$$\frac{E(\alpha x_1)}{\alpha} \leq x_{1,2} < \frac{E(\alpha x_1)}{\alpha} + \frac{1}{\alpha}.$$
On observe alors que x_1 et x_2 sont deux entiers dans un intervalle de longueur inférieure à 1 ($\alpha > 1$), ils sont donc égaux et f_α est bijective.
2. On a $\mathrm{Im}(f_{1,5}) = \{3k, 3k+1,\ k \in \mathbb{N}^*\}$. En effet, si $n = 2k$, $k \in \mathbb{N}^*$, alors $f_{1,5}(n) = E(3k) = 3k$; et si si $n = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}^*$, alors $f_{1,5}(n) = E(3k+1,5) = 3k+1$.

Exercice 12. Montrer, sans utiliser de raisonnement par récurrence, que pour $q \in \mathbb{R}\backslash\{0\,;1\}$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

Il suffit de considérer $(1-q)\sum_{k=0}^{n} q^k$, on a alors une somme télescopique dont les termes restant donnent $1-q^{n+1}$.