Chapitre 2

Modèles démographiques et suites numériques

Une première approche des modèles démographiques et plus généralement d'évolutions est de considérer deux formes d'évolutions d'une quantité entre deux étapes de sa vie :

Une évolution absolue : la quantité évolue de façon fixe, par exemple le nombre d'habitants d'un village augmentant de dix personnes chaque année.

Une évolution relative : la quantité évolue par rapport à elle-même ; par exemple le nombre d'habitants d'un autre village baisse chaque année de 5%.

Les étapes étant numérotées, on peut noter la population initiale du village p_0, après un an p_1, après deux ans p_2... La collection des p_n où n est le numéro de l'année est appelée **suite numérique** et est notée (p_n). Il y a deux moyens de connaître (p_n) : soit on sait calculer p_n connaissant n, soit connaissant le terme précédent p_{n-1} on le fait évoluer.

Pour le premier village, cela donnerait $p_{n+1} = p_n + 10$. Pour le second village, on obtiendrait $q_{n+1} = q_n - \frac{5}{100}q_n = 0,95q_n$. La suite (p_n) correspondant à l'évolution absolue est dite arithmétique ; la suite (q_n) correspondant à l'évolution relative est dite géométrique. Ce sont ces deux catégories de suites permettant la modélisation d'évolutions successives absolues et relatives que nous allons étudier dans ce chapitre.

L'économiste Malthus (1766-1834) a fourni l'une des première modélisation démographique de l'humanité à l'aide de suites géométriques et des ressources nécessaires à cette humanité qu'il a modélisé à l'aide de suites arithmétiques. La comparaison des évolutions de ces deux modèles et leurs conclusions a conduit à une théorie démographique nommé *mathulsianisme*.

2.1 Suites arithmétiques

2.1.1 Définition

Définition 2.1. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est* ***arithmétique*** *s'il existe un nombre réel r tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

Le réel r est appelé raison de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exemples : Les suites définies par $u_0 = 2$, respectivement $v_2 = 3$, et $u_{n+1} = u_n + 3$, respectivement $v_{n+1} = v_n - 4$, sont des suites arithmétiques de raison 3 et -4.

★ Vidéo.

2.1.2 Terme général

Théorème 2.1. *Soient r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Quels que soient les entiers naturels n et p, on a :*

$$u_n = u_0 + n \times r, \qquad u_n = u_1 + (n-1) \times r, \qquad u_n = u_p + (n-p) \times r.$$

Exemples : En reprenant l'exemple précédent, on trouve que $u_n = 2+3n$ et $v_n = 3-4(n-2)$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique dont on sait que $u_3 = 24$ et $u_8 = 74$. On sait que, si $p < n$,

$$u_n = r \times (n-p) + u_p.$$

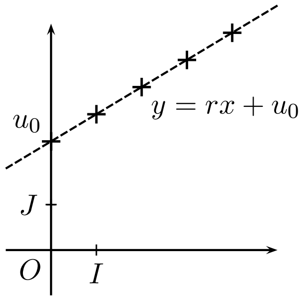
Avec $p = 3$ et $n = 8$, on a alors $u_8 = r \times (8-3) + u_3$, ou encore $74 = 5r + 24$. On en déduit que la raison de notre suite est $r = 10$; reste à déterminer son terme initial u_0. On sait que $u_3 = 3r + u_0$, donc que $u_0 = u_3 - 3r = 24 - 30 = -5$.

Notre suite a donc pour terme général $u_n = -5 + 10n$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

Corollaire Soient $r \in \mathbb{R}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r. Les points de la représentation graphique de u sont alignés.

Remarque : une suite arithmétique est donc une discrétisation d'une fonction affine.



2.1.3 Variations d'une suite arithmétique

Propriété 2.1. *Soient r un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r.*

- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante si et seulement si $r > 0$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante si et seulement si $r < 0$.*
- *$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante si et seulement si $r = 0$.*

Exemples :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = 5$ et avec $u_0 = 0$ est croissante : on a
$$0,\ 5,\ 10,\ 15,\ 20,\ 25...$$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = 0$ et avec $u_0 = 2$ est constante égale à 2 : on a
$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2...$$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $r = -3$ et avec $u_0 = 2$ est décroissante : on a
$$2,\ -1,\ -4,\ -7,\ -10,\ -13...$$

★ Vidéo.

2.2 Suites géométriques

2.2.1 Définition

Définition 2.2. *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique réelle. On dit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **géométrique** s'il existe un nombre réel q tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$:*
$$u_{n+1} = u_n \times q.$$
*Le réel q est appelé **raison** de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Exemples : Les suites définies par $u_0 = 2$, respectivement $v_2 = 3$, et $u_{n+1} = 3u_n$, respectivement $v_{n+1} = -4v_n$, sont des suites arithmétiques de raison 3 et -4.

★ Vidéo.

2.2.2 Terme général

Théorème 2.2. *Soient q un nombre réel $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. Quels que soient les entiers naturels n et p, on a :*
$$u_n = u_0 \times q^n, \qquad u_n = u_1 \times q^{n-1}, \qquad u_n = u_p \times q^{n-p}.$$

Exemples : En reprenant l'exemple précédent, on trouve que $u_n = 2\times 3^n$ et $v_n = 3\times(-4)^{n-2}$.

Exemple : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique dont on sait que $u_3 = 24$ et $u_8 = 768$. On sait que, si $p < n$,

$$u_n = q^{n-p}u_p.$$

Avec $p = 3$ et $n = 8$, on a alors $u_8 = q^{8-3}u_3$, ou encore $768 = q^5 \times 24$. On en déduit que $q^5 = \dfrac{768}{24} = 32$, donc que $q = 32^{\frac{1}{5}} = 2$. On a donc déterminé la raison de notre suite : $q = 2$; reste à déterminer son terme initial u_0. On sait que $u_3 = q^3 u_0$, donc que $u_0 = \dfrac{u_3}{q^3} = \dfrac{24}{2^3} = \dfrac{24}{8} = 3$.

Notre suite a donc pour terme général $u_n = 3 \times 2^n$.

★ Vidéo 1 ; vidéo 2.

2.2.3 Variation d'une suite géométrique

Propriété 2.2. *Soient q un nombre réel et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison q. On suppose que $u_0 > 0$.*

- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement croissante si et seulement si $q > 1$;*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est strictement décroissante si et seulement si $0 < q < 1$;*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est constante si et seulement si $q = 1$;*
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *n'est pas monotone si $q < 0$.*

Exemples :

1. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 5$ et avec $u_0 = 2$ est croissante : on a
$$2,\ 10,\ 50,\ 250,\ 1250,\ 6250...$$
2. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = 1$ et avec $u_0 = 2$ est constante égale à 2 : on a
$$2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2...$$
3. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = \dfrac{1}{5}$ et avec $u_0 = 2$ est décroissante : on a
$$2,\ \frac{2}{5},\ \frac{2}{25},\ \frac{2}{125},\ \frac{2}{625},\ \frac{2}{3125}...$$
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison $q = -5$ et avec $u_0 = 2$ est alterné :
$$2,\ -10,\ 50,\ -250,\ 1250,\ -6250...$$

★ Vidéo.

2.3 Attendus et savoir-faire

- Déterminer si une suite est arithmétique / géométrique ou non.
- Passer de la relation de récurrence d'une suite arithmétique / géométrique à son terme général et inversement.
- Déterminer les variations d'une suite arithmétique / géométrique.
- Modéliser un problème par une suite arithmétique / géométrique.

2.4 Exercices

2.4.1 Démarrage

Exercice 2.1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r. Dans chaque cas, calculer u_1, u_2 et u_3.

1. $u_0 = 1$ et $r = 3$.
2. $u_0 = 5$ et $r = -2$.
3. $u_0 = -2$ et $r = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2.2. Donner le terme général des suites de l'exercice 2.1.

Exercice 2.3. Donner les variations des suites de l'exercice 2.1.

Exercice 2.4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison r. Dans chaque cas, calculer u_1, u_2 et u_3.

1. $u_0 = 1$ et $q = 3$.
2. $u_0 = 5$ et $q = -2$.
3. $u_0 = -2$ et $q = -\dfrac{1}{4}$.

Exercice 2.5. Donner le terme général des suites de l'exercice 2.4.

Exercice 2.6. Donner les variations des suites de l'exercice 2.4.

2.4.2 Approfondissement

Exercice 2.7. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $u_0 = 1$ et $u_3 = 5$.
2. $u_1 = -5$ et $u_9 = -7$.
3. $u_{10} = 0$ et $u_{15} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 2.8. [Sylviculture] Un arbre mesurant 1m lors de sa plantation voit sa hauteur augmenter chaque année de la même longueur. On note u_0 sa hauteur initiale et u_n sa hauteur n année après sa plantation.

1. Sachant que l'arbre a doublé de hauteur en deux ans, de combien a-t-il poussé chaque année ?
2. Par quelle nombre sera multiplié sa hauteur initiale au bout de quatre ans ?

3. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Exprimer u_n en fonction de n.
4. Au bout de combien d'année la hauteur dépassera 25m ?

Exercice 2.9. [Écureuil] Un écureuil décide de faire des réserves de noisettes pour l'hiver. Le premier jour, il compte le nombre de noisettes qu'il lui reste en réserve : il en a 40. À partir du second jour, il ajoute 10 noisettes supplémentaires à son stock chaque jour. On note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite donnant le nombre de noisettes en réserve au n-ème jour de récolte, ainsi $u_0 = 40$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Quelle est la nature de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Préciser sa raison.
3. Donner l'expression de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. L'écureuil estime qu'il a besoin de 500 noisettes en réserve pour passer l'hiver. Au bout de combien de jours aura-t-il atteint ce nombre ?

Exercice 2.10. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

1. $u_0 = 1$ et $u_3 = 5$.
2. $u_1 = -5$ et $u_9 = -7$.
3. $u_{10} = 1$ et $u_{15} = \dfrac{2}{3}$.

Exercice 2.11. [Origami, algorithme] Une feuille de papier a une épaisseur de 0,15mm ; on note e_0 cette épaisseur. Chaque fois qu'on l'on plie la feuille en deux, son épaisseur double ; on note e_n son épaisseur après n pliages.

1. Calculer e_1 et e_2.
2. Quelle est la nature de la suite (e_n) ? Donner son terme général.
3. Écrire un algorithme donnant le nombre de pliage nécessaire pour que l'épaisseur de la feuille soit aussi grande que la distance Terre Soleil.
4. Réaliser cet algorithme en Python ou à l'aide d'un tableur.

Exercice 2.12. [Économie et écologie,*] La croissance économique désigne en général la croissance d'un indicateur économique : le PIB (Produit Intérieur Brut). Il s'agit de la somme des biens et services produits par un pays en une année. Bien évidemment la créations de bien et services nécessitent énergie et ressources, ce qui engendre déchets et pollutions. La croissance du PIB s'accompagne donc d'une croissance de la consommation d'énergie et des ressources ainsi que de la pollution. À des fins de simplification, nous ne considérerons que la pollution émise sous forme de gaz à effet de serre en équivalent CO_2 (il est difficile de quantifier les nombreuses formes de pollutions sous une seule variable). Pour plus d'explication si le sujet vous intéresse vous pouvez aller voir une série de deux vidéos traitant du sujet :

— Croissance et PIB pour les nuls.
— Croissance et PIB, les limites.

Elles sont faites conjointement par deux vidéastes : Heu'reka et Le Réveilleur. Le premier a une chaîne traitant d'économie et de finance ; le second traite de problématiques environnementales telles que la pollution, la gestion des ressources naturelles... Vous pouvez aussi lire cet article de Jean-Marc Jancovici, ingénieur, traitant lui aussi du sujet.

1. **Le PIB**
   Notre année de référence ou année zéro sera 1950, le PIB y était d'environ 5 000 milliards de dollars. En 2017, il est estimé à environ 80 000 milliards de dollars. On note p_n le PIB à l'année n ; on a donc $p_0 = 5000$ et $p_{67} = 80000$ (on garde comme unité le milliard de dollars par commodité). Afin de simplifier, on va supposer que chaque année, le PIB a augmenté d'un pourcentage fixe t entre 1950 et 2017.
   (a) Expliquer pourquoi on a pour tout entier naturel $n < 67$, $p_{n+1} = \left(1 + \dfrac{t}{100}\right) \times p_n$.
   (b) Quelle est la nature de la suite (p_n) ? Préciser sa raison et son terme initial puis donner son terme général.
   (c) Calculer le PIB en 2050 s'il continue d'évoluer de la même façon.
2. **La pollution**
   On sait que la quantité de gaz à effet de serre émise en 2015 est d'environ 20 000 Mt (méga tonne) équivalent CO_2. On note g_n la quantité de CO_2 émise à l'année n ; on a donc $g_{67} = 20000$. Supposons que la croissance de la quantité de gaz à effet de serre soit deux plus petite que celle du PIB.
   (a) Expliquer pourquoi on a pour tout entier naturel $n < 67$, $g_{n+1} = \left(1 + \dfrac{t}{200}\right) \times g_n$.
   (b) Quelle la nature de cette (g_n) ? Préciser sa raison et son terme initial puis donner son terme général.
   (c) Calculer la quantité de gaz à effet de serre émise en 1950 d'après ce modèle.
   (d) Calculer la quantité de gaz à effet de serre émise en 2050 s'il continue d'évoluer de la même façon.

Exercice 2.13. [Informatique,*] Afin de réduire le stockage nécessaire à des photos numériques, on utilise un algorithme de compression qui à chaque application diminue la taille de la photo de $21,4\%$. La taille initiale d'une photo est de 4Mo ; on pose $T_0 = 4$ et on note T_n la taille de la photo après n compressions successives.

1. Calculer T_1 et T_2.
2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n. En déduire la nature de la suite (T_n).
3. Exprimer T_n en fonction de n.
4. Peut-on stocker 20 000 photos sur une clé USB de 32Go ? Avec quel niveau de compression ?

2.4.3 Entraînement

Exercice 2.14. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis calculer u_0, u_1 et u_2 et donner leurs variations.

1. $u_0 = -2$ et $u_3 = 8$.
2. $u_{14} = -6$ et $u_{36} = -12$.
3. $u_{23} = 56$ et $u_{27} = 42$.

Exercice 2.15. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite géométrique. Dans chaque cas, donner le terme général de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis calculer u_0, u_1 et u_2 et donner leurs variations.

1. $u_0 = -2$ et $u_3 = 8$.
2. $u_{14} = -6$ et $u_{36} = -12$.
3. $u_{23} = 56$ et $u_{27} = 42$.