NOM : **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

Évaluation

Suites numériques

Sujet A 19/11/2021

Note et remarques : $/15$

Instructions générales :

- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. (/3)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sin\left(n\dfrac{\pi}{6}\right)$.

1. Calculer les six premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a $u_0 = \sin(0) = 0$; $u_1 = \sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$; $u_2 = \sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $u_3 = \sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$, $u_4 = \sin\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $u_5 = \sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{2}$.

2. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, c'est donc aussi vrai pour $x = n\dfrac{\pi}{6}$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée par -1 et 1.

Exercice 2. (/3)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n - n^2. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2.

On a $u_1 = u_0^2 - 0^2 = 1$ et $u_2 = u_1^2 - 1^2 = 0$.

2. Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = -n^2 \leq 0.$$

donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante sur $\mathbb{N}$.

3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée et donner un majorant.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc majorée par $u_0 = 1$.

Exercice 3. (/2)

Donner, sans justifier, la limite des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $u_n = 3n^2 - 2n + 6$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

2. $v_n = 1 - \dfrac{1}{n^2+1}$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1$.

Exercice 4. (/3)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$.

1. Déterminer les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + 2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left[\frac{1}{2} - 1\right] \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(-\frac{1}{2}\right) < 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle minorée, majorée, bornée ? Justifier.

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc majorée par son premier terme $u_0 = 3$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}\right)^n &> 0 \\ \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 &> 2. \end{aligned}$$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc minorée par 2. Minorée et majorée, elle est donc bornée.

Exercice 5. (/4)

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Calcul de terme

Données : $n \in \mathbb{N},\ u \in \mathbb{R}$

Début

  $n \longleftarrow 0$

  $u \longleftarrow 1$

  Tant que $n < 3$ **Faire**

    $u \longleftarrow u + 5n - 1$

    $n \longleftarrow n + 1$

  Sorties : u

Fin

1. Détailler l'exécution de cet algorithme sous la forme d'un tableau. Quelle(s) valeur(s) affiche-t-il en sortie ?

u	1	0	4	13
n	0	1	2	3

La valeur affichée en sortie est 13.

2. Quelle est la suite associée à cet algorithme ? On donnera sa formule de récurrence et son premier terme.

$$\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = u_n + 5n - 1. \end{cases}$$

3. On admet que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 1$ et diverge vers $+\infty$. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il détermine et affiche la première valeur de n pour laquelle $u_n > 1000$.

Algorithme 2 : Recherche de seuil

Données : $n \in \mathbb{N},\ u \in \mathbb{R}$

Début

  $n \longleftarrow 0$

  $u \longleftarrow 1$

  Tant que $u \leq 1000$ **Faire**

    $u \longleftarrow u + 5n - 1$

    $n \longleftarrow n + 1$

  Sorties : n

Fin