

Évaluation

Suites numériques

Sujet B

19/11/2021

Note et remarques : /15

Instructions générales :

- La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans l'évaluation.
- Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.
- Les exercices sont indépendants les uns des autres.
- La calculatrice est autorisée.

Exercice 1. (/3)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = \cos\left(n\frac{\pi}{3}\right)$.

1. Calculer les six premiers termes de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a $u_0 = \cos(0) = 1$; $u_1 = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$; $u_2 = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$; $u_3 = \cos(\pi) = -1$, $u_4 = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$
et $u_5 = \cos\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$.

2. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, c'est donc aussi vrai pour $x = n\frac{\pi}{3}$, on en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée par -1 et 1 .

Exercice 2. (/3)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = u_n + \frac{1}{n^2 + 1}. \end{cases}$$

1. Calculer u_1 et u_2 .

$$\text{On a } u_1 = u_0^2 + 1 = 1 \text{ et } u_2 = u_1^2 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

2. Étudier les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n^2 + 1} \geq 0.$$

donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante sur \mathbb{N} .

3. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée et donner un minorant.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc minorée par $u_0 = 0$.

Exercice 3. (/2)

Donner, sans justifier, la limite des suites suivantes lorsque n tend vers $+\infty$:

1. $u_n = -n^2 + 100n + 1$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty.$$

2. $v_n = 3 - \frac{1}{n^4}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3.$$

Exercice 4. (/3)

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n$.

1. Déterminer les variations de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}u_{n+1} - u_n &= 1 - \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} - \left[1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right] \\&= -\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} + \left(\frac{4}{5}\right)^n \\&= \left(\frac{4}{5}\right)^n \left[-\frac{4}{5} + 1\right] \\&= \left(\frac{4}{5}\right)^n \times \left(\frac{1}{5}\right) > 0.\end{aligned}$$

On en déduit que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

2. $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est-elle minorée, majorée, bornée ? Justifier.

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante donc minorée par son premier terme $u_0 = 0$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\left(\frac{4}{5}\right)^n &> 0 \\-\left(\frac{4}{5}\right)^n &< 0 \\1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n &< 1.\end{aligned}$$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc majorée par 1. Minorée et majorée, elle est donc bornée.

Exercice 5. (/4)

On considère l'algorithme suivant :

Algorithme 1 : Calcul de terme

Données : $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$
1 **Début**
2 | $n \leftarrow 0$
3 | $u \leftarrow 0$
4 | **Tant que** $n < 3$ **Faire**
5 | | $u \leftarrow u - 3n + 4$
6 | | $n \leftarrow n + 1$
7 | **Sorties :** u
8 **Fin**

1. Détailler l'exécution de cet algorithme sous la forme d'un tableau. Quelle(s) valeur(s) affiche-t-il en sortie ?

u	0	4	5	3
n	0	1	2	3

La valeur affichée en sortie est 3.

2. Quelle est la suite associée à cet algorithme ? On donnera sa formule de récurrence et son premier terme.

$$\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = u_n - 3n + 4. \end{cases}$$

3. On admet que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante à partir de $n = 2$ et diverge vers $-\infty$. Compléter l'algorithme ci-dessous afin qu'il détermine et affiche la première valeur de n pour laquelle $u_n < -1000$.

Algorithme 2 : Recherche de seuil

Données : $n \in \mathbb{N}$, $u \in \mathbb{R}$
1 **Début**
2 | $n \leftarrow 0$
3 | $u \leftarrow 0$
4 | **Tant que** $u \geq -1000$ **Faire**
5 | | $u \leftarrow u - 3n + 4$
6 | | $n \leftarrow n + 1$
7 | **Sorties :** n
8 **Fin**
