Nom : Prénom : Groupe : 2de 7

Évaluation

Géométrie plane - Calcul littéral

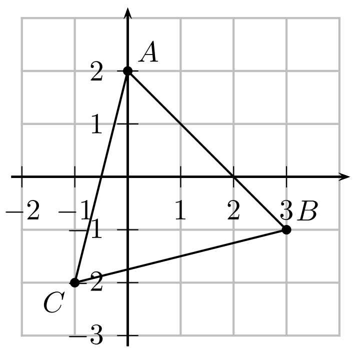
Sujet A 09/11/2021

Note et remarques : A : /5 ; C1 : /4 ; D1 : /4 ; E1 : /5 ; E2 : /2 ; Total : /20

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1.



1. Quelles sont les coordonnées de A, B et C ?

On a $A\,(0\,;2)$, $B\,(3\,;-1)$ et $C\,(-1\,;-2)$.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

ABC semble être équilatéral. Calculons les distances AC, BC et AB afin de le vérifier.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(-1-0)^2 + (-2-2)^2} \\ &= \sqrt{1+16} \\ &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(0-3)^2 + (2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{9+9} \\ &= \sqrt{18}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-1-3)^2 + (-2-(-1))^2} \\ &= \sqrt{16+1} \\ &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

On a $AC = BC$ donc ABC est isocèle en C. ABC n'est pas équilatéral car $AB \neq \sqrt{17}$.

Exercice 2. Soient $A(2\,;0)$, $B(5\,;6)$ et $C(-3\,;5)$ trois points du plan. Déterminer les coordonnées du point $D\,(x_D\,;y_D)$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu. On note M le milieu de la diagonale $[AC]$. On a

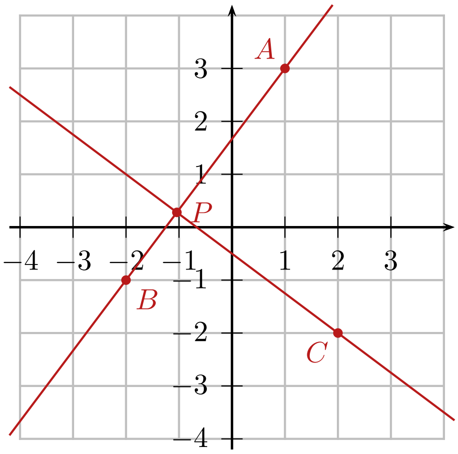
$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{2+(-3)}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{0+5}{2} = \frac{5}{2}.$$

Mais M est aussi le milieu de $[BD]$ donc

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_D}{2} \\ -\frac{1}{2} &= \frac{5 + x_D}{2} \\ -1 &= 5 + x_D \\ x_D &= -6, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y_M &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ \frac{5}{2} &= \frac{6 + y_D}{2} \\ 5 &= 6 + y_D \\ y_D &= -1. \end{aligned}$$

Il faut donc $D\,(-6\,;-1)$ pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 3. Construire sur le repère suivant le projeté orthogonal P de C sur la droite (AB) où $A\,(1\,;3)$, $B\,(-2\,;-1)$ et $C\,(2\,;-2)$.



Exercice 4. Soit ABC un triangle rectangle en B. On sait que $AC = 2$ et $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$. Déterminer $\sin(\widehat{BAC})$ et BC.

On a

$$\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1,$$

donc

$$\sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{2}{4} = \frac{2}{4}.$$

En prenant la racine carrée, on en déduit que $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Comme $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{BC}{AC}$, on en déduit que

$$BC = AC \times \sin(\widehat{BAC}) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Exercice 5.

1. Développer $(3-4z)^2-25$.

$$(3-4z)^2-25 = 9-24z+16z^2-25 = 16z^2-24z-16.$$

2. Factoriser $(3-4z)^2-25$.

$$(3-4z)^2-25 = (3-4z)^2-5^2 = (3-4z+5)(3-4z-5) = (8-4z)(-2-4z).$$

3. Résoudre l'équation $(8-4z)(-2-4z)=0$.

D'après la règle du produit nul, soit $8-4z=0$, i.e. $8=4z$ et donc $z=2$; soit $-2-4z=0$, i.e. $-2=4z$ et donc $z=-\dfrac{1}{2}$. On a donc deux solutions : $-\dfrac{1}{2}$ et 2.

4. En déduire les solutions de l'équation $16z^2-24z-16=0$.

D'après les questions précédentes, on a $16z^2-24z-16=(3-4z)^2-25=(8-4z)(-2-4z)$. On cherche donc les solutions de $(8-4z)(-2-4z)=0$. Et d'après la question précédente, ces solutions sont $-\dfrac{1}{2}$ et 2.