Évaluation

Géométrie plane - Calcul littéral

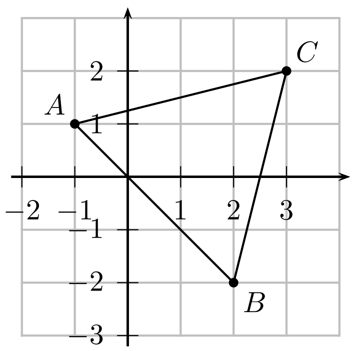
Sujet B 09/11/2021

Note et remarques : A : /5 ; C1 : /4 ; D1 : /4 ; E1 : /5 ; E2 : /2 ; Total : /20

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1.



1. Quelles sont les coordonnées de A, B et C ?

On a $A\,(-1\,;1)$, $B\,(2\,;-2)$ et $C\,(3\,;2)$.

2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifier.

ABC semble être équilatéral. Calculons les distances AC, BC et AB afin de le vérifier.

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2} \\ &= \sqrt{(3-(-1))^2 + (2-1)^2} \\ &= \sqrt{16+1} \\ &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BA &= \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(-1-2)^2 + (1-(-2))^2} \\ &= \sqrt{9+9} \\ &= \sqrt{18}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} \\ &= \sqrt{(3-2)^2 + (2-(-2))^2} \\ &= \sqrt{1+16} \\ &= \sqrt{17}. \end{aligned}$$

On a $AC = BC$ donc ABC est isocèle en C. ABC n'est pas équilatéral car $AB \neq \sqrt{17}$.

Exercice 2. Soient $A(-1\,;3)$, $B(2\,;5)$ et $C(0\,;-2)$ trois points du plan. Déterminer les coordonnées du point $D\,(x_D\,;y_D)$ tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

$ABCD$ est un parallélogramme si et seulement si ses diagonales se coupent en leur milieu. On note M le milieu de la diagonale $[AC]$. On a

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{3-2}{2} = \frac{1}{2}.$$

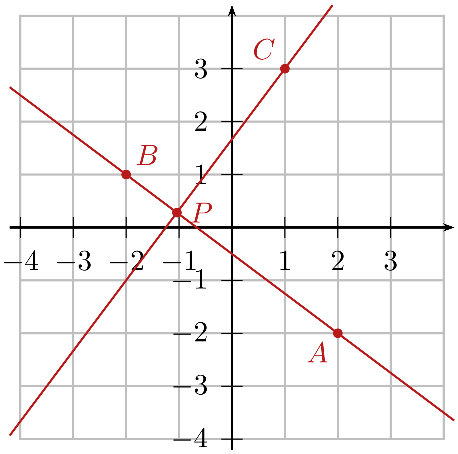
Mais M est aussi le milieu de $[BD]$ donc

$$\begin{aligned} x_M &= \frac{x_B + x_D}{2} \\ -\frac{1}{2} &= \frac{2 + x_D}{2} \\ -1 &= 2 + x_D \\ x_D &= -3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_M &= \frac{y_B + y_D}{2} \\ \frac{1}{2} &= \frac{5 + y_D}{2} \\ 1 &= 5 + y_D \\ y_D &= -4. \end{aligned}$$

Il faut donc $D\,(-3\,;-4)$ pour que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 3. Construire sur le repère suivant le projeté orthogonal P de C sur la droite (AB) où $A\,(2\,;-2)$, $B\,(-2\,;1)$ et $C\,(1\,;3)$.



Exercice 4. Soit ABC un triangle rectangle en B. On sait que $AC = 2$ et $\sin(\widehat{BAC}) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Déterminer $\cos(\widehat{BAC})$ et AB.

On a

$$\cos^2(\widehat{BAC}) + \sin^2(\widehat{BAC}) = 1,$$

donc

$$\cos^2(\widehat{BAC}) = 1 - \sin^2(\widehat{BAC}) = 1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$$

En prenant la racine carrée, on en déduit que $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{1}{2}$.

Comme $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{AB}{AC}$, on en déduit que

$$AB = AC \times \sin(\widehat{BAC}) = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$

Exercice 5.

1. Développer $(2-3t)^2 - 36$.

$$(2-3t)^2 - 36 = 4 - 12t + 9t^2 - 36 = 9t^2 - 12t - 32.$$

2. Factoriser $(2-3t)^2 - 36$.

$$(2-3t)^2 - 36 = (2-3t)^2 - 6^2 = (2-3t+6)(2-3t-6) = (8-3t)(-4-3t).$$

3. Résoudre l'équation $(8-3t)(-4-3t) = 0$.

D'après la règle du produit nul, soit $8 - 3t = 0$, i.e. $8 = 3t$ et donc $t = \frac{8}{3}$; soit $-4 - 3t = 0$, i.e. $-4 = 3z$ et donc $t = -\frac{4}{3}$. On a donc deux solutions : $\frac{8}{3}$ et $-\frac{4}{3}$.

4. En déduire les solutions de l'équation $9t^2 - 12t - 32 = 0$.

D'après les questions précédentes, on a $9t^2 - 12t - 32 = (2-3t)^2 - 36 = (8-3t)(-4-3t)$. On cherche donc les solutions de $(8-3t)(-4-3t) = 0$. Et d'après la question précédente, ces solutions sont $\frac{8}{3}$ et $-\frac{4}{3}$.