Padawan 1

Exercice 1. [Cours]

1. Donner, si ils existent, le domaine de définition, la parité, la dérivé, l'allure de la courbe, la périodicité et les limites aux bornes de la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$.
2. Donner $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ et pour $(\alpha\,;\beta) \in \mathbb{R}^2$: $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta$.
3. Retrouver la formule de $\cos(a)\cos(b)$ (en fonction de cos et/ou sin sans produit).

1. Ça va.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ (dérivée en 1) et $\lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha |\ln(x)|^\beta = \lim\limits_{x\to 0^+} x^\alpha$.
3. $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b)+\cos(a-b)]$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{R}$: $\left(\dfrac{4}{9}\right)^x \left(\dfrac{8}{27}\right)^{1-x} = \dfrac{2}{3}$.

En passant au log on obtient :

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x \left(\frac{8}{27}\right)^{1-x} = \frac{2}{3} \iff x\ln\left(\frac{4}{9}\right) + (1-x)\ln\left(\frac{8}{27}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

En utilisant $\ln(x^y) = y\ln(x)$, on obtient

$$2\ln\left(\frac{2}{3}\right) + 3(1-x)\ln\left(\frac{2}{3}\right) = \ln\left(\frac{2}{3}\right).$$

On en déduit que $(2x+3-3x-1)\ln\left(\dfrac{2}{3}\right) = 0$ et donc $x=2$.

Exercice 3. Déterminer $(n\,;p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tels que $n<p$ et $n^p = p^n$.
Indication : on pourra étudier les variation de la fonction $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

En passant au logarithme on obtient

$$n^p = p^n \iff \frac{\ln(n)}{n} = \frac{\ln(p)}{p}.$$

On étudie $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $f'(x) = \dfrac{1-\ln(x)}{x^2}$ et donc f est croissante $]0\,;e]$ et décroissante sur $[e\,;+\infty[$. Elle ne peut pas prendre deux fois la même valeur sur ces intervalles donc l'entier n est dans l'un des deux et p dans l'autre.

Supposons que $n \in]0\,;e]$, on a soit $n=1$ soit $n=2$. Si $n=1$, $1 = 1^p \neq p^1 = p \in [e\,;+\infty[$. Il reste donc $n=2$, or $2^4 = 4^2$ donc $(2\,;4)$ est l'unique solution.

Exercice 4. Résoudre $2\sin^3(x) - 17\sin^2(x) + 7\sin(x) + 8 = 0$.

On pose $X = \sin(x)$. On cherche alors les racines dans $[-1\,;1]$ de $2X^3 - 17X^2 + 7X + 8$. On remarque que $X = 1$ est racine évidente et on peut donc factoriser le polynôme par $X - 1$. On obtient alors

$$2X^3 - 17X^2 + 7X + 8 = (X-1)(2X^2 - 15X - 8).$$

On s'intéresse aux éventuelles racines du polynôme du second degré. Son discriminant est 319, il en possède donc deux :

$$X_{1,2} = \frac{15 \pm \sqrt{319}}{4}.$$

Des deux, seule $\dfrac{15 - \sqrt{319}}{4} \in [-1\,;1]$, les solutions sont donc

$$\left\{ \frac{\pi}{2}[2\pi]\,; \arcsin\left(\frac{15-\sqrt{319}}{4}\right)[2\pi] \right\}.$$

Padawan 2

Exercice 5. [Cours]

1. Donner, si ils existent, le domaine de définition, la parité, la dérivé, l'allure de la courbe, la périodicité et les limites aux bornes de la fonction logarithme $x \mapsto \ln(x)$.
2. Donner $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{x\mapsto -\infty} |x|^\alpha e^x$.
3. Retrouver la formule de $\sin(a)\sin(b)$ (en fonction de cos et/ou sin sans produit).

1. Ça va encore.
2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-1}{x} = 1$ (dérivée en 0) et $\lim\limits_{x\to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$.
3. $\sin(a)\sin(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

Exercice 6.

1. Rappeler les formules de $\cos(2x)$.
2. En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right)$.

1. $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$.
2. On part de $\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) - 1$ pour calculer $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ puis $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ et enfin $\tan\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2} - 1$.

Exercice 7. Résoudre $2^{x^3} = 3^{x^2}$.

En passant au logarithme on a :

$$2^{x^3} = 3^{x^2} \iff x^3\ln(2) = x^2\ln(3) \iff x^2[x\ln(2) - \ln(3)] = 0 \iff x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)}.$$

Exercice 8. Résoudre le système suivant d'inconnues $x \leq y$ en fonction du signe du paramètre a.

$$\begin{cases} e^x e^y &= a \\ xy &= 1 \end{cases}$$

Si $a \in \mathbb{R}_-$ pas de solution. Sinon on passe au logarithme dans la première pour obtenir $x+y = \ln(a)$. $xy = 1$ et nous donne alors l'équation $x^2 - \ln(a)x + 1 = 0$. On a $\Delta = \ln^2(a) - 4$ donc pas de solution si $a \in \left]\dfrac{1}{e^2} ; e^2\right[$, sinon $x_{1,2} = \dfrac{\ln(a) \pm \sqrt{\ln^2(a) - 4}}{2}$.

Exercice 9. Résoudre l'équation

$$\cos(2x) = (\sqrt{3}-2)\sin(x) - \sqrt{3} + 1.$$

Indication : on pourra montrer et utiliser le fait que $7+4\sqrt{3} = (2+\sqrt{3})^2$ à un certain point.

Par duplication du cosinus, on obtient

$$-2\sin^2(x) + (2-\sqrt{3})\sin(x) + \sqrt{3} = 0.$$

On pose alors $\sin(x) = X$ et cherche à déterminer les racines de $-2X^2 + (2-\sqrt{3})X + \sqrt{3}$ dans $[-1\,;1]$. Le discriminant de ce polynôme est $7+4\sqrt{3}$, en montrant et utilisant l'indication, on obtient alors nos deux racines :

$$X_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \text{ou} \qquad X_2 = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que l'ensemble des solutions est

$$\left\{-\frac{2\pi}{3}[2\pi]\,;-\frac{\pi}{3}[2\pi]\,;\frac{\pi}{6}[2\pi]\,;\frac{5\pi}{6}[2\pi]\right\}.$$

Padawan 3

Exercice 10. [Cours]

1. Donner, si ils existent, le domaine de définition, la parité, la dérivé, l'allure de la courbe, la périodicité et les limites aux bornes de la fonction puissance $x \mapsto x^\alpha$ pour $\alpha \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Z}$.
2. Donner $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x}$ et pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$.
3. Retrouver la formule de $\sin(a)\cos(b)$ (en fonction de cos et/ou sin sans produit).

1. Définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.
2. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{x} = 1$ (dérivée en 0 de sin donc $\cos(0)$) et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$.
3. $\sin(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$.

Exercice 11.

1. Rappeler les formules de $\cos(a-b)$ et $\sin(a-b)$.
2. En déduire les valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$; $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\tan\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.

1. $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$ et $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$.
2. $\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$. Donc

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

De même

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

et on en déduit que

$$\tan\left(\frac{\pi}{12}\right) = 2 - \sqrt{3}.$$

Exercice 12. Résoudre $x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x$, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned}
x^{\sqrt{x}} = \sqrt{x}^x &\iff e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})} \\
&\iff \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x}) \\
&\iff \sqrt{x}\ln(x) = \frac{x}{2}\ln(x) \\
&\iff \sqrt{x}\left(1 - \frac{\sqrt{x}}{2}\right)\ln(x) = 0 \\
&\iff \ln(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \sqrt{x} = 2 \\
&\iff x = 1 \quad \text{ou} \quad 4.
\end{aligned}$$

Exercice 13.

1. Montrer que pour tout réel $x \geq 0, \ln(1+x) \leq x$.
2. Calculer pour $n \geq 1$,
$$v_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right).$$
3. Déduire de ce qui précède que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ diverge vers $+\infty$.

1. On dérive $\ln(1+x) - x$, la dérivée est décroissante et vaut 0 en 0.
2. On a $\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$ donc par télescopage de la somme
$$v_n = \ln(n+1) - \ln(1) = \ln(n+1).$$
3. Par 1., on a $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$ donc $v_n \leq u_n$. On en déduit que
$$\lim_{n\to+\infty} u_n \geq \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty.$$