Padawan 1

Exercice 1. [Cours]

1. Démontrer que pour tout $x \in [-1\,;1]$, $\cos(\arcsin(x)) = \sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.
2. Montrer que arcsin est continue sur $[-1\,;1]$, dérivable sur $]-1;1[$ et $\forall x \in]-1\,;1[$: $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Il suffit d'utiliser $\cos^2(X) + \sin^2(X) = 1$ avec $X = \arccos(x)$.
2. sin est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, d'après le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque, on a, pour tout $x \in]-1\,;1[$ (et en notant $y = \arcsin(x)$, i.e. $x = \sin(y)$),
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos(y)} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$
en utilisant le fait que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. On déduit la continuité de la dérivabilité.

Exercice 2. Déterminer $\arcsin\left(\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)\right)$.

$\arcsin\left(\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)$ et $\arcsin(\sin(x)) = x$ si $x \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin\left(\sin\left(\frac{15\pi}{7}\right)\right) = \frac{\pi}{7}$.

Exercice 3. Soit $f(x) = \cosh(x)\cos(x) + \sinh(x)\sin(x)$. Calculer f'.

$f'(x) = 2\cos(x)\sinh(x)$.

Exercice 4. Montrer $\arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) = \pi$.
Indication : on pourra utiliser le fait que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

On pose $\arctan(1) = x$, $\arctan(2) = y$ et $\arctan(3) = z$. On a
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} = \frac{1+2}{1-1\times 2} = -3.$$
On pose $u = x+y$, on a alors
$$\tan(u+z) = \frac{\tan(u)+\tan(z)}{1-\tan(u)\tan(z)} = \frac{3-3}{1+9} = 0.$$
On a alors $\tan(x+y+z) = 0 = \tan(k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$. On a $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$ et puisque la fonction arctan est croissante et tend vers $\frac{\pi}{2}$, on a
$$\frac{\pi}{2} < \frac{3\pi}{4} \leq \arctan(1) + \arctan(2) + \arctan(3) \leq \frac{3\pi}{2}.$$

Nous sommes donc dans $\left]\frac{\pi}{2}\,;\frac{3\pi}{2}\right[$. On en déduit que $\arctan(1)+\arctan(2)+\arctan(3)=\pi$.

Exercice 5. Déterminer le signe sur $\mathbb{R}$ de $f(x)=\dfrac{e^{\pi x}-1}{1+x^2}-\pi\arctan(x)$

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{\pi(e^{\pi x}-1)}{(x^2+1)^2}\left(x^2-\dfrac{2}{\pi}x+1\right)$. Pas de racine dans le trinôme car $\Delta<0$ et donc f' est du signe de $e^{\pi x}-1$ et donc du signe de x. Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_-$ et croissante sur $\mathbb{R}_+$ puis $f(0)=0$ et $\forall x\in\mathbb{R}^*, f(x)\geq 0$.

Padawan 2

Exercice 6. [Cours]

1. Démontrer que pour tout $x \in [-1\,;1]\,, \arccos(x) + \arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. arccos est continue sur $[-1\,;1]$ et dérivable sur $]-1\,;1[$ et $\forall x \in\ ]-1\,;1[,\ \arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

1. Soit $x \in [-1\,;1]$, on a donc $\dfrac{\pi}{2} - \arccos(x) \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$. On a alors, par formule de trigonométrie,
$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos(x)\right) = \cos(\arccos(x)) = x.$$
On en déduit que $\arcsin(x) = \dfrac{\pi}{2} - \arccos(x)$.
2. cos est dérivable sur $]0\,;\pi[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, d'après le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque, on a, pour tout $x \in\ ]-1\,;1[$ (et en notant $y = \arccos(x)$, i.e. $x = \cos(y)$),
$$\arccos'(x) = \frac{-1}{\sin(y)} = \frac{-1}{\sin(\arccos(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}},$$
en utilisant le fait que $\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1-x^2}$. On déduit la continuité de la dérivabilité.

Exercice 7. Déterminer $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{37\pi}{5}\right)\right)$.

$\arccos\left(\cos\left(\dfrac{33\pi}{5}\right)\right) = \arccos\left(\cos\left(\dfrac{3\pi}{5}\right)\right)$. $\arccos(\cos(x)) = x$ si $x \in [0\,;\pi]$, on en déduit que $\arccos\left(\cos\left(\dfrac{37\pi}{5}\right)\right) = \dfrac{3\pi}{5}$.

Exercice 8. Soit $f(x) = \sinh(x)\cos(x) + \cosh(x)\sin(x)$. Calculer f'.

$f'(x) = 2\cos(x)\cosh(x)$

Exercice 9. Résoudre $\arctan(3-x) + \arctan\left(4 - \dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Indication : on pourra utiliser le fait que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

On suppose x solution de l'équation. On a alors

$$\begin{aligned}
&\tan\left(\arctan(3-x)+\arctan\left(4-\frac{1}{x}\right)\right)=-1\\
\iff &\left(\frac{3-x+4-\frac{1}{x}}{1-(3-x)(4-\frac{1}{x})}\right)=-1\\
\iff &7-x-\frac{1}{x}=-1+(3-x)\left(4-\frac{1}{x}\right)\\
\iff &7x-x^2-1=-x+12x-3-4x^2+x\\
\iff &-3x^2-5x+2=0.
\end{aligned}$$

Le discriminant de ce polynôme est égal à 49, ses racines sont -2 et $\frac{1}{3}$.

Exercice 10. Soit $a>0$, exprimer le plus simplement possible le réel $\cosh(\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})$.

$$\begin{aligned}
\cosh(\ln(\sqrt{a}+\sqrt{a+1})&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}+\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a+1}}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}+\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a+1}}{a-(a+1)}\right)\\
&=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a}+\sqrt{a+1}-\sqrt{a}+\sqrt{a+1}\right)\\
&=\sqrt{a+1}.
\end{aligned}$$

Padawan 3

Exercice 11. [Cours]

1. Montrer que arctan dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
2. Montrer que :
   — $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$
   — $\forall x \in \mathbb{R}_-^*,\ \arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$.

1. tan est dérivable sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$ et sa dérivée ne s'annule pas sur cet intervalle, d'après le théorème sur la dérivée d'une bijection réciproque, on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et en notant $y = \arctan(x)$, i.e. $x = \tan(y)$),
$$\arctan'(x) = \frac{1}{1+\tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$
On déduit la continuité de la dérivabilité.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$, on note $y = \arctan(x)$ alors $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{\tan(y)} = \tan\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right)$ et $0 < \dfrac{\pi}{2} - y < \dfrac{\pi}{2}$. D'où : $\arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2} - y = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Pour $\mathbb{R}_-^*$, on utilise l'imparité de arctan.

Exercice 12. Déterminer $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{18\pi}{5}\right)\right)$.

$\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{18\pi}{5}\right)\right) = \arcsin\left(\sin\left(\dfrac{-2\pi}{5}\right)\right)$ et $\dfrac{-2\pi}{5} \in \left[-\dfrac{\pi}{2}\,;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\arcsin\left(\sin\left(\dfrac{18\pi}{5}\right)\right) = \dfrac{-2\pi}{5}$.

Exercice 13. Soit $f(x) = ch(x)\cos(x) + sh(x)\sin(x)$. Calculer f'.

$f'(x) = 2\cos(x)\sinh(x)$.

Exercice 14. Montrer que $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Indication : on pourra utiliser le fait que $\tan(a+b) = \dfrac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\tan(b)}$.

On pose $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) = x$ et $\arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = y$. On a
$$\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\frac{1}{3}} = 1.$$

On a $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$ et puisque la fonction arctan est croissante, on a

$$0 < \arctan\left(\frac{1}{2}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \leq \frac{\pi}{2}.$$

Nous sommes donc dans $\left]0\,;\dfrac{\pi}{2}\right[$. On en déduit que $\arctan\left(\dfrac{1}{2}\right) + \arctan\left(\dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{\pi}{4}$.

Exercice 15. Résoudre $5\cosh(x) - 4\sinh(x) = 3$.

L'équation $5\cosh(x) - 4\sinh(x) = 3$ conduit à $\mathrm{e}^x + 9\mathrm{e}^{-x} = 6$, ce qui donne $e^{2x} - 6\mathrm{e}^x + 9 = 0$ ou encore $(\mathrm{e}^x - 3)^2 = 0$ et donc $x = \ln(3)$.