Padawan 1

Exercice 1. [Cours]

1. Énoncer la formule de Moivre.
2. Donner la dérivée de arccos.

1. Formule de Moivre, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$: $(\cos(x) + \mathrm{i}\sin(x))^n = \cos(x)^n + \mathrm{i}\sin(x)^n$
2. Dérivable sur $]-1\,;1[$ et $\arccos'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 2. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant : $z = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{12}$.

$$z = \left(\frac{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\right)^{12} = \sqrt{2}^{12}\left(e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}\right)^{12} = 2^6 e^{\mathrm{i}\frac{7}{12}\times 12\pi} = -2^6.$$

Exercice 3. Représenter, en justifiant, dans le plan l'ensemble :

1. $A = \{z \in \mathbb{C}\,;\ |z-1| = |z-\mathrm{i}|\}$.
2. $B = \left\{z \in \mathbb{C}\,;\ \arg(z) = -\dfrac{\pi}{4}[\pi]\right\}$.

1. $z = a+\mathrm{i}b$, $|z-1| = |z-\mathrm{i}| \iff |z-1|^2 = |z-\mathrm{i}|^2 \iff (a-1)^2+b^2 = a^2+(b-1)^2 \iff a = b$ donc on a la droite d'équation $y = x$.
2. Ce sont les complexes d'argument $-\dfrac{\pi}{4}$ ou $-\dfrac{5\pi}{4}$ donc la droite d'équation $y = -x$.

Exercice 4. Mettre sous forme algébrique et exponentielle le nombre complexe :

$$z = \frac{1-\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} \quad \text{où } \theta \in\,]-\pi\,;\pi[\,.$$

$$\frac{1-\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} = \frac{1-(\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta))}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} = \frac{1-e^{-\mathrm{i}\theta}}{1+e^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}+e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = \mathrm{i}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

— Si $\theta \in\,]-\pi\,;0[\iff \dfrac{\theta}{2} \in \left]\dfrac{-\pi}{2}\,;0\right[\implies \tan(\frac{\theta}{2}) \leq 0$ et donc $z = -\mathrm{i}|\tan(\frac{\theta}{2})| = |\tan(\frac{\theta}{2})|e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\tan(\frac{\theta}{2})e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

— Si $\theta \in\,]0\,;\pi[\iff \dfrac{\theta}{2} \in \left]0\,;\dfrac{-\pi}{2}\right[\implies \tan(\frac{\theta}{2}) \geq 0$ et donc $z = \mathrm{i}|\tan(\frac{\theta}{2})| = |\tan(\frac{\theta}{2})|e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \tan(\frac{\theta}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

Exercice 5. Soit $z_1 = 1 + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$.

1. Donner les formes algébriques et exponentielles de $z_1 z_2$.
2. En déduire les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

1. On a
$$z_1 z_2 = \sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} = 2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{12}},$$
et
$$z_1 z_2 = \sqrt{3} + 1 + \mathrm{i}(\sqrt{3} - 1) = 2\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right].$$
2. On en déduit que :
$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Padawan 2

Exercice 6. [Cours]

1. Énoncer la formule d'Euler.
2. Donner la dérivée de arctan.

1. $e^{ix} = \cos(x) + \mathrm{i}\sin(x)$, $\cos(x) = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} + e^{-\mathrm{i}x}}{2}$ et $\sin(x) = \dfrac{e^{\mathrm{i}x} - e^{-\mathrm{i}x}}{2\mathrm{i}}$.
2. Dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\arctan'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercice 7. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant : $z = \left(\dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}}\right)^{20}$.

$$z = \left(\frac{2e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{\sqrt{2}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}}\right)^{20} = \sqrt{2}^{20}\left(e^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)}\right) = 2^{10}e^{\mathrm{i}\frac{7}{12}\times 12\pi} = -2^{10}.$$

Exercice 8. Soit $z \in \mathbb{C}$. Montrer que

$$\frac{|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leqslant |z| \leqslant |\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|.$$

L'inégalité de droite est l'inégalité triangulaire.

$$\begin{aligned}
0 \leq (|\mathrm{Re}(z)| - |\mathrm{Im}(z)|)^2 &\iff 0 \leq |\mathrm{Re}(z)|^2 - 2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|^2 \\
&\iff 2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)| \leq |\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2 \\
&\iff 2|\mathrm{Re}(z)||\mathrm{Im}(z)| + |\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2 \leq 2(|\mathrm{Re}(z)|^2 + |\mathrm{Im}(z)|^2) \\
&\iff (|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|)^2 \leq 2|z| \\
&\iff \frac{|\mathrm{Re}(z)| + |\mathrm{Im}(z)|}{\sqrt{2}} \leqslant |z|.
\end{aligned}$$

Exercice 9. Représenter dans le plan l'ensemble :

1. $C = \{z \in \mathbb{C} \ : \ z + \overline{z} = 4\}$
2. $D = \left\{z \in \mathbb{C} \ : \ \arg(z) = \dfrac{\pi}{4}[\pi]\right\}$.

1. $z = a + ib$, $z + \overline{z} = 4 \iff 2a = 4 \iff a = 2$ donc la droite d'équation $x = 2$.
2. Ce sont les complexes d'argument $\dfrac{\pi}{4}$ ou $\dfrac{5\pi}{4}$ donc la droite d'équation $y = x$.

Exercice 10. Mettre sous forme algébrique et exponentielle le nombre complexe :

$$z = \frac{1-\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} \quad \text{où } \theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[.$$

$$\frac{1-\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} = \frac{1-(\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta))}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} = \frac{1-e^{-\mathrm{i}\theta}}{1+e^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}+e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = \mathrm{i}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

— Si $\theta \in \left]-\pi\,;0\right[\iff \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[\implies \tan(\frac{\theta}{2}) \leq 0$ et donc $z = -\mathrm{i}|\tan(\frac{\theta}{2})| = |\tan(\frac{\theta}{2})|e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\tan(\frac{\theta}{2})e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
— Si $\theta \in \left]0\,;\pi\right[\iff \frac{\theta}{2} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\implies \tan(\frac{\theta}{2}) \geq 0$ et donc $z = \mathrm{i}|\tan(\frac{\theta}{2})| = |\tan(\frac{\theta}{2})|e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \tan(\frac{\theta}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.

Padawan 3

Exercice 11. [Cours] Donner :

1. La valeur de $\arg\left(\dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)$,
2. La dérivée de arcsin.

1. $\arg\left(\dfrac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) = (\vec{u}\,;\vec{v})\ [2\pi]$.
2. Dérivable sur $]-1\,;1[$ et $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 12. Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant : $z = \dfrac{(1+\mathrm{i})^{2000}}{(\mathrm{i}-\sqrt{3})^{1000}}$.

$$z = \frac{(\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\pi/4})^{2000}}{(2e^{\mathrm{i}5\pi/6})^{1000}} = e^{500\mathrm{i}\pi - \mathrm{i}\frac{2500\pi}{3}} = e^{\frac{-2000\mathrm{i}\pi}{3}} = e^{-\frac{(1998+2)\mathrm{i}\pi}{3}} = e^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} = -\frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

car $1998 = 999 \times 2$.

Exercice 13. Représenter, en justifiant, dans le plan l'ensemble :

1. $E = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z+1| = |z-\mathrm{i}|\}$.
2. $F = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z-1+2\mathrm{i}| = 3\}$.

1. $z = a+ib, |z+1| = |z-\mathrm{i}| \iff |z+1|^2 = |z-\mathrm{i}|^2 \iff (a+1)^2+b^2 = a^2+(b-1)^2 \iff a = -b$ donc c'est la droite d'équation $y = -x$.
2. C'est le cercle de centre $1-2\mathrm{i}$ et de rayon $\sqrt{3}$.

Exercice 14. Montrer l'égalité du parallélogramme :

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(|z| + |z'|)^2$$

En donner une interprétation géométrique.

$$|z+z'|^2 = (z+z')\overline{(z+z')} = z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'}$$

et

$$|z-z'|^2 = (z-z')\overline{(z-z')} = z\overline{z} - z\overline{z'} - z'\overline{z} + z'\overline{z'}.$$

Donc

$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2(z\overline{z} + z'\overline{z'}) = 2(|z| + |z'|)^2.$$

Interprétation : la somme des carrées des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

Exercice 15. Mettre sous forme algébrique et exponentielle le nombre complexe :

$$z = \frac{1-\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} \quad \text{où } \theta \in \left]-\pi\,;\pi\right[.$$

$$\frac{1-\cos(\theta)+\mathrm{i}\sin(\theta)}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} = \frac{1-(\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta))}{1+\cos(\theta)-\mathrm{i}\sin(\theta)} = \frac{1-e^{-\mathrm{i}\theta}}{1+e^{-\mathrm{i}\theta}} = \frac{e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}-e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}}{e^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}+e^{-\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}} = \frac{2\mathrm{i}\sin(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})} = \mathrm{i}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

- Si $\theta \in \left]-\pi\,;0\right[\iff \frac{\theta}{2} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;0\right[\implies \tan(\frac{\theta}{2}) \leq 0$ et donc $z = -\mathrm{i}|\tan(\frac{\theta}{2})| = |\tan(\frac{\theta}{2})|e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\tan(\frac{\theta}{2})e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.
- Si $\theta \in \left]0\,;\pi\right[\iff \frac{\theta}{2} \in \left]0\,;\frac{\pi}{2}\right[\implies \tan(\frac{\theta}{2}) \geq 0$ et donc $z = i|\tan(\frac{\theta}{2})| = |\tan(\frac{\theta}{2})|e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = \tan(\frac{\theta}{2})e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$.