Padawan 1

Exercice 1. [Cours]

1. Donner l'expression complexe d'une homothétie de centre A d'affixe a et de rapport $k \in \mathbb{R}$ pour un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z'.
2. Montrer que les solutions de $z^n = 1$ sont les racines n-ièmes de l'unité $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2ik\pi}{n}}$, $k \in [\![0\,;n-1]\!]$. En déduire que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^n - 1 = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(z-\omega_k)$.

1. $z' = k(z-a) + a$ ou $z' - a = k(z-a)$.
2. Puisque $z^n = 1$, on peut en déduire que $|z| = 1$ et donc que $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On en déduit donc que $\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta} = \mathrm{e}^0 = 1$, autrement dit que $n\theta = 0 + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, i.e. $\theta = \dfrac{2k\pi}{n}$, $k \in \mathbb{Z}$. L'ensemble des solutions est donc
$$\mathcal{S} = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}},\ k \in \mathbb{Z}\right\}.$$
$z^n - 1$ étant de degré n, il a au plus n racines, on peut donc prendre n représentants de $\mathcal{S}$:
$$\mathcal{S}_n = \left\{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}},\ k \in [\![0\,;n-1]\!]\right\}.$$
Les ω_k étant les racines de $z^n - 1$, on a peut donc factoriser ce polynôme sous la forme $\displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(z-\omega_k)$.

Exercice 2. Soient A et C deux points d'affixes $z_A = -2-3\mathrm{i}$ et $z_C = 4+3\mathrm{i}$. Déterminer l'affixe du point B pour que ABC soit équilatéral.

ABC est équilatéral si et seulement si B est l'image de A par une rotation de centre C et d'angle $\pm\dfrac{\pi}{3}$. On a donc
$$z_B = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z_A - z_C) + z_C.$$

Exercice 3. Soit $\theta \in]0\,;2\pi[$, calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}} \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(n+1)\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}} - \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}}\right) \\
&= \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{\frac{in\theta}{2}} \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\
&= \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right) \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 4. Résoudre $(1+\mathrm{i})z^2 - 3z + 2 - \mathrm{i} = 0$.

On calcule le discriminant ce polynôme :

$$\Delta = (-3)^2 - 4(1+\mathrm{i})(2-\mathrm{i}) = -3 - 4\mathrm{i} = (1-2\mathrm{i})^2.$$

Pour trouver les racines de Δ, on pose $\delta = x + \mathrm{i}y$ et on résout $\delta^2 = \Delta$ qui nous donne un système 2×2 (auquel on peut astucieusement ajouter l'équation $x^2 + y^2 = |z|$).

On a donc pour solutions

$$z_1 = \frac{3-(1-2\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{2+2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = 1$$

et

$$z_2 = \frac{3+(1-2\mathrm{i})}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{4-2\mathrm{i}}{2(1+\mathrm{i})} = \frac{1-3\mathrm{i}}{2}.$$

Padawan 2

Exercice 5. [Cours]

1. Montrer que $S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.
2. Montrer que les racines n-ièmes de l'unité $\omega_k,\ k \in [\![0\,;n-1]\!]$ vérifient :
   (a) $\omega_k = \omega_1^k$ et $\omega_{n-k} = \overline{\omega_k}$;
   (b) $\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = 0$;

1. Si $z = 0,\ S_n = 0$ et si $z = 1,\ S_n = n$. Sinon, on a par télescopage

$$(1 - z)S_n = \sum_{k=0}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{n} z^{k+1} = 1 - z^{n+1}.$$

On a alors $S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z}$.

2.
   (a) $\omega_k = \omega_1^k$ est évident. Par ailleurs, on a

$$\omega_{n-k} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}(n-k)\pi}{n}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}n\pi}{n}} \times \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi} \times \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}} = \overline{\omega_k}.$$

   (b) D'après 1, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1 - z^n}{1 - z}$$

et donc, pour $k \neq 0$, on a $\omega_k \neq 1$ et puisque les ω_k sont les racines n-ièmes de l'unité,

$$\sum_{k=0}^{n-1} \omega_k = \sum_{k=0}^{n-1} \omega_1^k = \frac{1 - \omega_1^n}{1 - \omega_1} = 0.$$

Exercice 6. Trouver les racines cubiques de $2 - 2\mathrm{i}$.

On a

$$2 - 2\mathrm{i} = 2(1 - \mathrm{i}) = 2\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$$

donc, avec $\omega_k = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{3}},\ k \in [\![0\,;2]\!]$, on a

$$(2 - 2\mathrm{i})^{\frac{1}{3}} = (2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{12}}\omega_k.$$

Exercice 7. Soient A, B et C les points d'affixes respectives

$$z_A = -1 + \mathrm{i}, \quad z_B = 2 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_C = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

Le triangle ABC est-il rectangle en C ?

On a

$$\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C} = \frac{-1+3\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}} = \frac{1}{9} + \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

qui n'est pas un imaginaire pur et ne correspond donc pas à une similitude d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$ et de centre C. ABC n'est pas rectangle en C.

Exercice 8. Résoudre $z^2 + (3+2\mathrm{i})z + 5 + \mathrm{i} = 0$.

On calcule le discriminant ce polynôme :

$$\Delta = (3+2\mathrm{i})^2 - 4(5+\mathrm{i}) = -15 + 8\mathrm{i} = (1+4\mathrm{i})^2.$$

On a donc pour solutions

$$z_1 = \frac{-(3+2\mathrm{i}) - (1+4\mathrm{i})}{2} = \frac{-4-6\mathrm{i}}{2} = -2 - 3\mathrm{i}$$

et

$$z_2 = \frac{-(3+2\mathrm{i}) + (1+4\mathrm{i})}{2} = \frac{-2+2\mathrm{i}}{2} = -1 + \mathrm{i}.$$

Exercice 9. On pose $j = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1. À quoi est égal $1 + j + j^2$? Justifier.
2. Montrer que l'application s définie par $s(z) = -j^2 z + 1 + j^2$ est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

1. D'après l'exercice de cours et puisque j est racine cubique de l'unité, $1 + j + j^2 = 0$.
2. On a pour tout $z \in \mathbb{C}$,

   $$s(z) = -j^2 z + 1 + j^2 = -j^2(z-1) + 1 = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{\frac{4\mathrm{i}\pi}{3}}(z-1) + 1 = \mathrm{e}^{\frac{7\mathrm{i}\pi}{3}}(z-1) + 1 = \mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}(z-1) + 1.$$

   s est donc une rotation de centre C d'affixe 1 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Padawan 3

Exercice 10. [Cours]

1. Donner l'expression complexe d'une rotation de centre A d'affixe a et d'angle $\theta \in [0\,;2\pi]$ pour un point M d'affixe z en un point M' d'affixe z'.
2. Montrer que que les points d'affixes $\omega_k = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$, $k \in [\![0\,;n-1]\!]$ sont les sommets d'un polygones réguliers inscrits dans le cercle unité de côté $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

1. $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)+a$ ou $z'-a = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-a)$.
2. Pour tout $k \in [\![0\,;n-1]\!]$, on a $|\omega_k| = 1$, les n points d'affixes ω_k sont donc les sommets d'un polygone inscrit dans le cercle unité. Montrons qu'il est régulier. Pour tout $k \in [\![0\,;n-2]\!]$, la distance entre deux points consécutifs du sommet est

$$|\omega_{k+1}-\omega_k| = \left|\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}-1\right)\right| = \left|\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}-1\right| = \left|\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}-\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{n}}\right)\right| = \left|2\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\right| = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

Cela prouve à la fois que le polygone est régulier et que son côté vaut $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Autre possibilité :
Pour tout $k \in [\![0\,;n-2]\!]$, on a

$$\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}} \quad \text{et donc} \quad \arg\left(\frac{\omega_{k+1}}{\omega_k}\right) = \frac{2\pi}{n}.$$

De plus, on a

$$\frac{\omega_0}{\omega_{n-1}} = \frac{1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi}\mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}} \quad \text{et donc} \quad \arg\left(\frac{\omega_0}{\omega_{n-1}}\right) = \frac{2\pi}{n}.$$

On en déduit que le polygone formé par les ω_k est régulier. Montrons que ses côtés ont pour mesure $2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

En faisant un dessin, on peut voir que le côté c du polygone est l'hypoténuse d'un triangle rectangle dont les côtés adjacents à l'angle droit ont pour longueurs $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ et $1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. On a alors

$$\begin{aligned} c^2 &= \sin^2\left(\frac{2\pi}{n}\right) + \left[1-\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]^2 \\ &= 2-2\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) \\ &= 4\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right). \end{aligned}$$

On en déduit que $c = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

Exercice 11. Trouver les racine cinquièmes de $\sqrt{3}-\mathrm{i}$.

On a
$$\sqrt{3}-\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$$
donc, avec $\omega_k=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}k\frac{\pi}{5}},\ k\in [\![0\,;4]\!]$, on a
$$(\sqrt{3}-\mathrm{i})^{\frac{1}{5}}=(2)^{\frac{1}{5}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\omega_k.$$

Exercice 12. Soit $\theta\in\,]0\,;2\pi[$, calculer la somme $S_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta)$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}\sin(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n}\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n}\mathrm{e}^{\mathrm{i}k\theta}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}(n+1)\theta}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}(n+1)\theta}{2}}}{\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}-\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\theta}{2}}}\right)\\
&= \mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}n\theta}{2}}\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right)\\
&= \sin\left(\frac{n\theta}{2}\right)\frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.
\end{aligned}$$

Exercice 13. Résoudre $2\mathrm{i}z^2+(2-6\mathrm{i})z+8\mathrm{i}=0$.

On calcule le discriminant ce polynôme :
$$\Delta=(2-6\mathrm{i})^2-4\times 2\mathrm{i}\times 8\mathrm{i}=32-24\mathrm{i}=(6-2\mathrm{i})^2.$$

On a donc pour solutions
$$z_1=\frac{-(2-6\mathrm{i})-(6-2\mathrm{i})}{4\mathrm{i}}=\frac{-8+8\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}=2+2\mathrm{i}$$
et
$$z_2=\frac{-(2-6\mathrm{i})+(6-2\mathrm{i})}{4\mathrm{i}}=\frac{4+4\mathrm{i}}{4\mathrm{i}}=1-\mathrm{i}.$$

Exercice 14. Soit s la similitude de centre l'origine transformant $3+\mathrm{i}$ et $4+8\mathrm{i}$. Déterminer l'expression de s (on précisera son rapport et son angle) puis l'image de $4+8\mathrm{i}$ par s.

Puisque la similitude a pour centre l'origine, il suffit de calculer

$$\begin{aligned}\frac{4+8\mathrm{i}}{3+\mathrm{i}} &= \frac{(4+8\mathrm{i})(3-\mathrm{i})}{10}\\ &= \frac{20+20\mathrm{i}}{10}\\ &= 2(1+\mathrm{i})\\ &= 2\sqrt{2}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}.\end{aligned}$$

s est donc une similitude d'angle $\frac{\pi}{4}$ et rapport $2\sqrt{2}$.

On a enfin $s(4+8\mathrm{i}) = 2(1+\mathrm{i})(4+8\mathrm{i}) = -8+24\mathrm{i}$.