

Évaluation

Inférence bayésienne

Sujet A

10/11/2021

Note et remarques :

/8

Instructions générales :

- La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans l'évaluation.
- Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.
- Les exercices sont indépendants les uns des autres.
- La calculatrice est autorisée.

Exercice 1. (/3)

An de grâce 1871, le pays de Félinie subit les affres de la crise écologique et est parcouru de troubles politiques. Sa population se divise en trois catégories :

- les aristocats, qui pensent que seuls les « meilleurs » doivent gouverner (on note A l'événement correspondant) ; ils représentent 60% de la population ;
- les ploutocats, qui pensent que seuls les plus riches doivent gouverner (on note P l'événement correspondant) ;
- les démocats, qui pensent que le pouvoir ne peut qu'appartenir au peuple (on note D l'événement correspondant) ; ils représentent 30% de la population.

On s'intéresse aux opinions politiques des habitants de Félinie en fonction de leur milieu social. Ainsi, on notera F l'événement « l'habitant est issu d'un milieu social favorisé ». On sait que 19% de Félinie est considérée comme favorisée ; notamment 5% est à la fois favorisée et aristocat et 9% à la fois favorisée et ploutocat.

	A	P	D	Total
F	0,05	0,09	0,05	0,19
\bar{F}	0,55	0,01	0,25	0,81
Total	0,6	0,1	0,3	1

1. Compléter le tableau de probabilité ci-dessus.

2. Sachant que l'individu est favorisé, calculer la probabilité qu'il soit démocrate.

Cela correspond à

$$\mathbb{P}_F(D) = \frac{\mathbb{P}(D \cap F)}{\mathbb{P}(F)} = \frac{0,05}{0,19} \simeq 0,26.$$

La probabilité qu'un individu soit démocrate sachant qu'il est favorisé est donc de 0,26.

3. En déduire la probabilité qu'il soit aristocat ou ploutocat sachant qu'il est favorisé.

Un individu est aristocat ou ploutocat si et seulement si il n'est pas démocrate, autrement dit on a $A \cup P = \bar{D}$.
Donc

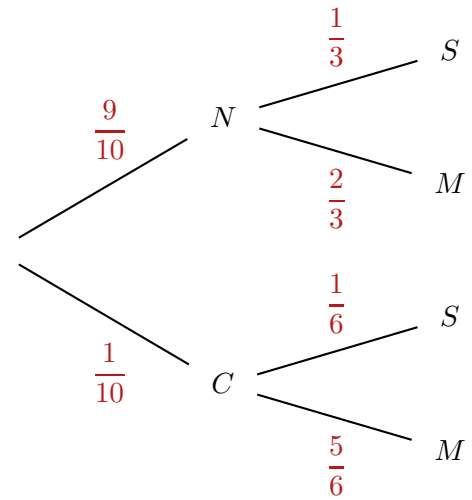
$$\mathbb{P}_F(A \cup P) = \mathbb{P}_F(\bar{D}) = 1 - \mathbb{P}_F(D) = 0,74.$$

La probabilité qu'il soit aristocat ou ploutocat sachant qu'il est favorisé est donc de 0,74.

Exercice 2. (/5)

Lors d'une attaque de zombies, on peut être confronté à deux types de zombies : les zombies normaux et castors zombies. Les castors zombies sont certes moins nombreux (seulement 1 zombie sur 10) mais ils sont aussi plus dangereux : seulement 1 chance sur 6 de survivre sachant que le zombie est un castor alors que c'est 1 chances sur 3 sachant que le zombie est normal. On note :

- N l'événement « le zombie est normal » ;
- C l'événement « le zombie est un castor zombie » ;
- S l'événement « on survit » ;
- M l'événement « on ne survit pas ».



1. À l'aide des données de l'énoncé, compléter l'arbre ci-dessus.
2. Calculer la probabilité de rencontrer un castor zombie et de survivre.

Rencontrer un castor zombie et survivre est l'événement $C \cap S$, on a

$$\mathbb{P}(C \cap S) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(S) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{60}.$$

Il y a 1 chance sur 60 de rencontrer un castor zombie et de survivre.

3. Calculer la probabilité de survivre.

On a

$$\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(C \cap S) + \mathbb{P}(N \cap S) = \frac{1}{60} + \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{19}{60}.$$

Il y a 19 chances sur 60 de survivre.

4. Sachant que vous n'avez pas survécu, quelle est la probabilité que le dernier zombie rencontré soit un castor zombie ?

On souhaite donc calculer $\mathbb{P}_M(C)$. Pour cela, calculons d'abord $\mathbb{P}(M) = 1 - \mathbb{P}(S) = \frac{41}{60}$. Calculons ensuite

$$\mathbb{P}(M \cap C) = \mathbb{P}(C) \times \mathbb{P}_C(M) = \frac{1}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{1}{12}.$$

On a donc

$$\mathbb{P}_M(C) = \frac{\mathbb{P}(M \cap C)}{\mathbb{P}(M)} = \frac{1}{12} \times \frac{60}{41} = \frac{5}{41}.$$

Sachant que l'on a pas survécu, ils y avaient 5 chances sur 41 pour que le zombie soit un castor zombie.