Chapitre 5

Probabilités conditionnelles

Afin d'introduire ce chapitre et la nécessité d'utiliser les probabilités conditionnelles on pourra visionner deux vidéos réalisées par Mr Phi dont on trouvera la première partie ici et la seconde là. Il développe une approche heuristique et peu mathématiques des probabilités conditionnelles et de la loi Bayes au travers d'exemples et d'expériences de pensées à la fois simples et éclairantes.

5.1 Rappels

Définition 5.1. *(Notions de probabilités)*

— *Une expérience est dite* ***aléatoire*** *lorsqu'on ne peut pas en prévoir avec certitude le résultat.*

— *On appelle* ***issue*** *d'une expérience aléatoire tout résultat possible de cette expérience.*

— ***L'univers*** *associé à une expérience aléatoire est l'ensemble de ses issues. On le note généralement* Ω.

— *Définir une* ***loi de probabilité*** *sur un univers* Ω *fini, c'est associer à chaque issue* ω_i *un nombre réel* p_i *compris entre 0 et 1 tel que*

$$\sum_i p_i = 1.$$

Définition 5.2. *(Événements) On considère une expérience aléatoire d'univers fini* Ω.

— *On appelle* ***événement*** *toute partie de* Ω.

— ***L'événement certain*** *contient toutes les issues de* Ω.

— ***L'événement impossible*** *ne contient aucune issue, on le note* $\emptyset$.

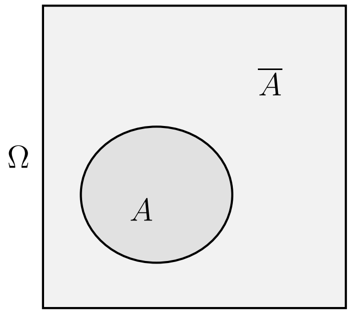
— *On appelle* ***événement élémentaire*** *tout événement ne contenant qu'une seule issue.*

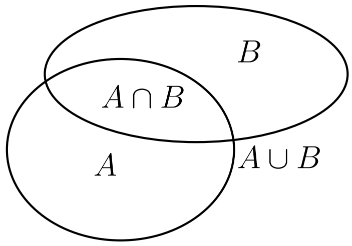
— *Pour un univers fini, la* ***probabilité d'un événement*** A *est la somme des probabilités associées à chacune des issues de* A. *On la note* $\mathbb{P}(A)$.

Définition 5.3. *(Opérations) On considère une expérience aléatoire d'univers* Ω.

— *On note* $A \cup B$ *l'événement constitué des issues appartenant à* A ***ou*** *à* B, *on le lit « A* ***union*** *B ».*

— *On note $A \cap B$ l'événement constitué des issues appartenant à A **et** à B. On le lit « A **intersection** B ».*
— *On note $\overline{A}$ l'événement constitué des issues de Ω qui ne sont pas dans A, on l'appelle **événement contraire** ou **complémentaire** de A.*
— *Deux événements A et B de Ω sont dits **incompatibles** ou **disjoints** si on a $A \cap B = \emptyset$.*





Propriété 5.1. *On considère une expérience aléatoire d'univers fini Ω sur lequel a été défini une loi de probabilité. Soient A et B deux événements de Ω. On a :*

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Si de plus A et B sont incompatibles :

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

En particulier :

$$\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A).$$

Exemple : On lance un dé cubique truqué, les probabilités d'apparition de chaque face sont indiquées dans le tableau ci-dessous.

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,21	0,19	0,22	0,13	0,14	0,11

On a bien $0,21 + 0,19 + 0,22 + 0,13 + 0,14 + 0,11 = 1$.

On note A l'événement « obtenir un résultat pair ». Alors $A = \{2, 4, 6\}$ et la probabilité de A vaut

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) &= p_2 + p_4 + p_6 \\ &= 0,19 + 0,13 + 0,11 \\ &= 0,43. \end{aligned}$$

L'événement contraire de A est quant à lui $\overline{A} = \{1, 3, 5\}$. $\overline{A}$ est ainsi l'événement « obtenir un résultat impair ». Et on a

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{A}) &= 1 - \mathbb{P}(A) \\ &= 1 - 0,43 \\ &= 0,57. \end{aligned}$$

Cela correspond bien au résultat de $p_1 + p_3 + p_5$.

5.2 Probabilités conditionnelles

5.2.1 Probabilités conditionnelles de A sachant B

Définition 5.4. *Soient A et B deux événements dans un univers donné Ω avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. La* ***probabilité conditionnelle de A sachant B*** *(probabilité que A se réalise sachant que B s'est réalisé) – notée $\mathbb{P}(A|B)$ ou $\mathbb{P}_B(A)$ – est définie par*

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Exemple : Supposons B un événement de probabilité $0,4$ et A un événement tel que $A \cap B$ ait pour probabilité $0,2$. On a

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,2}{0,4} = 0,5.$$

Propriété 5.2. *Soient A et B deux événements avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$ (et éventuellement $\mathbb{P}(A) \neq 0$). On a*

1. $0 \leq P_B(A) \leq 1$;
2. $\mathbb{P}_B(A) + \mathbb{P}_B(\overline{A}) = 1$;
3. $\mathbb{P}_B(A) = \dfrac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$ *(formule de Bayes).*

Démonstration. Exercice. □

Exemple : Soient A et B deux événements de probabilités respectives $0,3$ et $0,7$ tels que la probabilité de B sachant A vaille 0.6. On a alors, par la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}_A(B)\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,6 \times 0,3}{0,7} \simeq 0,26.$$

5.2.2 Tableau

Des tableaux à double entrée permettent de trouver facilement des probabilités conditionnelles en y lisant $\mathbb{P}(A \cap B)$, $\mathbb{P}(A)$, $\mathbb{P}(B)$ (ou $card(A)$, $card(B)$,..).

	B	$\overline{B}$	Total
A	$\mathbb{P}(A \cap B)$	$\mathbb{P}(A \cap \overline{B})$	$\mathbb{P}(A)$
$\overline{A}$	$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$	$\mathbb{P}(\overline{A} \cap \overline{B})$	$\mathbb{P}(\overline{A})$
Total	$\mathbb{P}(B)$	$\mathbb{P}(\overline{B})$	1

Exemple : Considérons le tableau de probabilités suivant :

	B	$\overline{B}$	Total
A	$0,04$	$0,06$	$0,1$
$\overline{A}$	$0,3$	$0,6$	$0,9$
Total	$0,34$	$0,66$	1

On a alors, par exemple,

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{0,04}{0,34} \simeq 0,18,$$

et

$$\mathbb{P}_A(\overline{B}) = \frac{\mathbb{P}(\overline{B} \cap A)}{\mathbb{P}(A)} = \frac{0,06}{0,1} \simeq 0,6.$$

★ Vidéo.

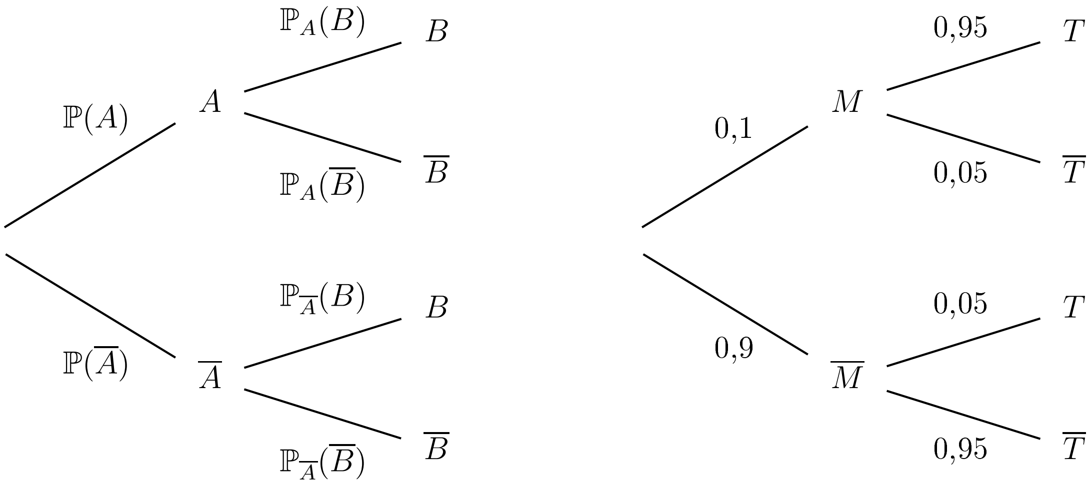
5.3 Arbre pondéré et probabilités totales

5.3.1 Arbre pondéré

Un **arbre pondéré** est un **graphe** décrivant les différents chemins permettant d'accéder à un événement en passant par d'autres événements. Il est constitué de **nœuds** où sont placés les événements et de **branches** liant ces différents événements et affichant la probabilité de l'événement suivant sachant celle du précédent.

Propriété 5.3. *Règles d'un arbre de probabilités.*

1. *La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud est égale à 1.*
2. *La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités des branches constituantes de ce chemin.*
3. *La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des différents chemins menant à l'événement.*



Exemple : Considérons le cas d'une maladie et d'un test censé déterminer si un individu a cette maladie ou pas. On note M l'événement « l'individu est malade » et T « le test est positif ». Supposons qu'un individu ait 1 chance sur 10 d'être malade ($\mathbb{P}(M) = 0,1$) et que le test soit fiable à 95%, autrement dit il y a 95 chances 100 que le test soit positif sachant que l'individu soit malade (vrai positif, $\mathbb{P}_M(T) = 0,95$) et 5 chances sur 100 que le test soit positif sachant que l'individu est sain (faux positif, $\mathbb{P}_{\overline{M}}(T) = 0,05$).

À l'aide des règles ci-dessus, nous sommes capables de déterminer les autres probabilités du problèmes et compléter l'arbre représenté ci-dessus à droite ; par exemple, la somme des probabilités issues du premier nœud devant être égale à 1, on en déduit que $\mathbb{P}(\overline{M}) = 0,9$ et on peut placer $0,9$ sur la flèche correspondante. Le reste de l'arbre est complété de la même façon et on applique la règle *2.* de la propriété 5.3 pour trouver les probabilités finales ; par exemple, la probabilité

$$\mathbb{P}(T \cap \overline{M}) = \mathbb{P}_{\overline{M}}(T)\mathbb{P}(\overline{M}) = 0,9 \times 0,05 = 0,045.$$

★ Vidéo.

5.3.2 Probabilités totales

Théorème 5.1. *(Formules des probabilités totales)*

1. *(Cas de deux événements) Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On a alors*

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A \cap \overline{B}) = \mathbb{P}_B(A)\mathbb{P}(B) + \mathbb{P}_{\overline{B}}(A)\mathbb{P}(\overline{B}).$$

2. *(Cas général) Soient A et $B_1, ..., B_n$ $n+1$ événements d'un univers Ω. Supposons que*
   — $\mathbb{P}(B_i) \neq 0$ *pour tout* $i \in \{1, ..., n\}$ *;*
   — *les B_i sont deux à deux disjoints $B_i \cap B_j = \emptyset$ pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ tels que $i \neq i$;*
   — Ω *soit l'union des B_i :*

$$\Omega = B_1 \cup ... \cup B_n = \bigcup_{i=1}^{n} B_i.$$

   On a alors

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}_{B_i}(A)\mathbb{P}(B_i).$$

Exemple : Reprenons l'exemple précédent du test et de la maladie. L'énoncé nous dit que la probabilité d'être malade est de $0,1 = 10\%$. Cependant, on ne connaît pas *a priori* la probabilité que le test soit positif indépendamment du fait d'être malade ou pas : on ne connaît pas $\mathbb{P}(T)$.

Grâce à la formule des probabilités totales (théorème 5.1, *1.*) et à l'arbre ci-dessus, on a

$$\mathbb{P}(T) = \mathbb{P}(T \cap M) + \mathbb{P}(T \cap \overline{M}) = 0,095 + 0,045 = 0,14.$$

La probabilité que le test soit positif est donc $0,14 = 14\%$.

★ Vidéo.

5.4 Indépendance

Définition 5.5. *Soient A et B deux événements A et B d'un univers Ω. On dit que A et B sont* ***indépendants*** *si*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

Propriété 5.4. *Soient A et B deux événements A et B d'un univers Ω tels que $\mathbb{P}(A) \neq 0$. A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$.*

Démonstration. Exercice. □

Propriété 5.5. *Soient A et B deux événements A et B d'un univers Ω. Si A et B sont indépendants, alors $\overline{A}$ et B le sont aussi.*

Démonstration. D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) \quad \text{donc} \quad \mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

Comme A et B sont indépendants, on a $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$. Donc

$$\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B) \times \mathbb{P}(\overline{A}).$$

On en déduit que $\overline{A}$ et B sont indépendants. □

5.5 Exercices

5.5.1 Démarrage

Exercice 5.1. Sachant que $\mathbb{P}(A) = 0,6$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,4$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0,2$, calculer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$. En déduire $\mathbb{P}_A(\overline{B})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$.

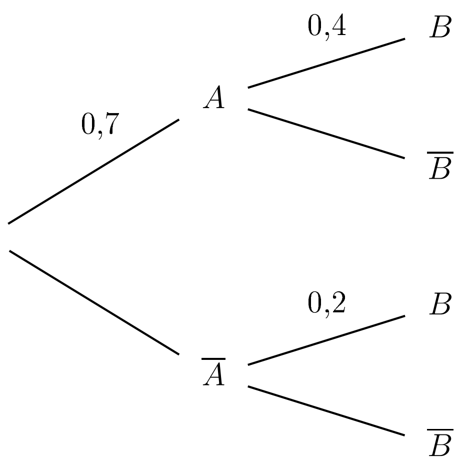
Exercice 5.2. Soient A et B deux événements dont les probabilités sont données dans le tableau ci-dessous.

	A	$\overline{A}$	Total
B		0,15	
$\overline{B}$			0,8
Total	0,7		

1. Recopier et compléter le tableau.
2. Calculer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.

Exercice 5.3. Soient A et B deux événements.

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-contre.
2. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(B)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(\overline{B})$.



Exercice 5.4. Sachant que A et B sont deux événements indépendants et que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{5}$, calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.

Exercice 5.5. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{5}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{10}$. A et B sont-ils indépendants.

Exercice 5.6. Sachant que A et B sont deux événements indépendants de même probabilité et que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{36}$, calculer $\mathbb{P}(A)$.

5.5.2 Approfondissement

Exercice 5.7. [Économie] Une banque souhaite contrôler – à l'aide d'une nouvelle machine – l'authenticité des billets qui lui sont rapportés par des commerçants. Elle effectue un contrôle sur un ensemble de 2000 billets composé de billets de 10, 20 et 50 euros. Voici les résultats :

— 600 billets de 10 sont authentiques ; 2 billets de 50 sont faux.

— il y a 5 faux billets en tout ;

— les billets de 20 représentent 40% des billets et 60% des faux.

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

	Billet de 10	Billet de 20	Billet de 50	Total
Billets authentiques				
Faux billets				
Total				

2. On choisit un billet au hasard parmi les 2000 et on note
   — F l'événement « le billet choisi est faux » ;
   — C l'événement « le billet choisi est de cinquante » ;
   — V l'événement « le billet choisi est de vingt ».
3. Traduire l'événement $V \cap F$ en langage courant puis calculer $\mathbb{P}(V \cap F)$ et $\mathbb{P}_V(F)$.
4. Sachant que le billet choisi est faux, calculer la probabilité qu'il soit de 50.

Exercice 5.8. [Politique] On s'intéresse à un pays fictif ayant l'organisation politique suivante : une oligarchie participative où le peuple élit des soi-disant représentants qui gouvernent dans leurs intérêts. L'assemblée censée représenter le peuple est composé de trois partis : le C'était Mieux Avant (à 30%), le Ne Changeons Rien (à 15%) et l'Illusion du Progrès (à 55%). On s'intéresse à la probabilité qu'un représentant pris au hasard dans l'assemblée serve ses propres intérêts. On note

— A l'événement « le représentant est dans le parti C'était Mieux Avant » ;

— R l'événement « le représentant est dans le parti Ne Changeons Rien » ;

— P l'événement « le représentant est dans le parti de l'Illusion du Progrès » ;

— I l'événement « le représentant sert ses intérêts ».

On sait que dans le parti C'était Mieux Avant, 55% des représentants servent leurs intérêts ; 73% pour le Ne Changeons Rien et 61% pour l'Illusion du Progrès.

1. Dresser et compléter un tableau modélisant la situation à partir des informations ci-dessus.
2. Quelle est la probabilité que le représentant tiré au hasard serve ses intérêts ?
3. Sachant que le représentant sert ses intérêts, quelle est la probabilité qu'il vienne du parti Ne Changeons Rien ? Du C'était Mieux Avant ?
4. Sachant que le représentant ne sert pas ses intérêts, quelle est la probabilité qu'il vienne du parti l'Illusion du Progrès ? Du C'était Mieux Avant ?

Exercice 5.9. [Médecine] Une personne vient de passer un test de dépistage pour une maladie rare et potentiellement incurable, celui s'avère positif. Elle demande alors à son médecin la probabilité d'une erreur de diagnostic ; celui-ci répond que le test est positif pour 99% des malades alors que pour $99,9\%$ des personnes saines, il est négatif. On sait par ailleurs que la maladie touche une personne sur 100000. On note M et T les événements « la personne est malade » et « le test est positif ».

1. Construire un arbre pondéré modélisant l'expérience.
2. Déterminer la probabilité qu'une personne ait un test positif.

3. Déterminer la probabilité qu'une personne soit malade sachant que le test est positif. Conclure.

Exercice 5.10. On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Dans chacun des cas suivants, dire si les événements sont indépendants.

1. A « tirer un roi » et B « tirer un rouge » ;
2. A « tirer un roi » et B « ne pas tirer un as » ;
3. A « tirer un roi ou une dame rouge » et B « tirer un rouge ».

Exercice 5.11. [Écologie] Chaque année, une ruche a un risque de 5% d'être attaquée par un frelon asiatique. Dans ce cas, ses chances de survie sont de 10%. Si ce n'est pas le cas, ses chances de survie sont de 90%. Chaque année, les risques sont les mêmes et les attaques sont indépendantes.

1. Modéliser la situation par un arbre de probabilité.
2. Quelle est la probabilité que la ruche survive une année ?
3. En déduire quelle est la probabilité que la ruche survive trois années de suite.
4. Si la menace du frelon n'existait pas, qu'elle serait alors cette même probabilité ?

Exercice 5.12. [Informatique] Pour savoir si un mail est indésirable ou pas, celui-ci est testé par un algorithme. On note T l'événement « le test est positif » et I l'événement « le mail est indésirable ».

1. Reproduire et compléter le tableau ci-dessous.

	I	$\overline{I}$	Total
T	0,23		
$\overline{T}$		0,73	
Total	0,25		

2. Quelle est la probabilité que le test soit négatif sachant quel mail est indésirable ?
3. Quelle est la probabilité que le test soit positif sachant quel mail est désirable ?
4. En déduire la probabilité que l'algorithme se trompe.
5. On applique le test à dix mails indépendamment les uns des autres sans savoir s'ils sont indésirables ou pas. Quelle est la probabilité qu'aucun test ne soit positif ?
6. Quelle est alors la probabilité qu'aucun mail ne soit indésirable ?

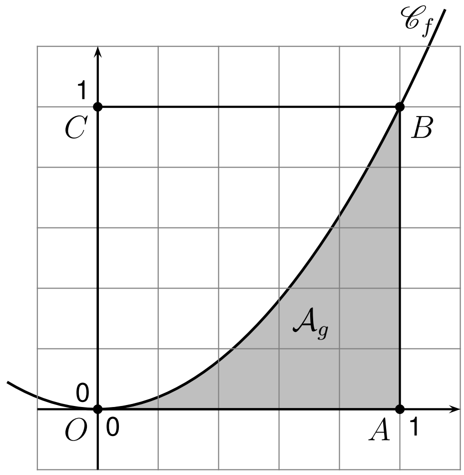
Exercice 5.13. [Le Problème des Deux Enfants] On suppose que la probabilité de donner naissance à une fille est la même que celle de donner naissance à un garçon : $\mathbb{P}(F) = \mathbb{P}(G) = \dfrac{1}{2}$. On admet de plus que le sexe d'un enfant à la naissance est indépendant de ceux nés avant. Vous allez chez une personne dont vous savez qu'elle a deux enfants mais dont vous ignorez le sexe. C'est une fille qui vous ouvre la porte ; on ne sait pas si c'est l'aînée ou pas des deux enfants. Quelle est la probabilité l'autre enfant soit un garçon : $\dfrac{1}{2}$ ou $\dfrac{2}{3}$? Justifier.

Exercice 5.14. [Démonstration] Soit A un événement indépendant de lui-même. Montrer que A est soit l'univers soit l'ensemble vide.

Exercice 5.15. [Algorithme]

La méthode de Monte Carlo est une technique permettant de calculer des approximations d'aires difficiles à obtenir à l'aide d'outils géométriques ou analytiques de façon simple grâce aux probabilités.

On considère f la fonction carrée et on souhaiterai connaître l'aire sous sa courbe sur l'intervalle $[0\,;1]$ représentée en gris ci-contre. On notera cette aire $\mathcal{A}_g$.



1. On place au hasard un point $M\,(x\,;y)$ dans le carré $OABC$. Exprimer en fonction en fonction de $\mathcal{A}_g$ et $\mathcal{A}_{OABC}$, l'aire du carré $OABC$, la probabilité que M soit dans la zone grise.
2. À quels intervalles appartiennent x et y ?
3. À quelle(s) condition(s) sur x et y M appartient à la zone grise ?
4. Pour estimer l'aire $\mathcal{A}_g$, on va prendre 1000 points au hasard dans le le carré $OABC$ et déterminer la proportion appartenant à $\mathcal{A}_g$. C'est le but de l'algorithme ci-dessous. Le recopier et le compléter.

Algorithme 1 : Monte Carlo

```
Début
    C ⟵ 0
    Pour k allant de 1 à ... Faire
        x ⟵ réel compris entre ...
        y ⟵ réel compris entre ...
        Si ... Alors
            C ⟵...
    P ⟵ ...
    Sorties : P
Fin
```

5. Programmer l'algorithme en Python. *Indication :* il faudra import la librairie *random* en début de programme et utiliser la fonction *uniform(0,1)* (ou *random.uniform(0,1)*) pour tirer un nombre aléatoirement entre 0 et 1.
6. Comment améliorer l'estimation de $\mathcal{A}_g$?
7. (*) En considérant le quart de disque trigonométrique inclus dans le carré $OABC$, écrire et coder en Python un algorithme permettant d'approcher π.

5.5.3 Entraînement

Exercice 5.16. Sachant que $\mathbb{P}(A) = 0,4$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,3$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0,2$, calculer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$. En déduire $\mathbb{P}_A(\overline{B})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$.

Exercice 5.17. Sachant que $\mathbb{P}(A) = 0,5$, $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,2$ et $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B) = 0,4$, calculer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(B)$. En déduire $\mathbb{P}_A(\overline{B})$ et $\mathbb{P}_{\overline{A}}(\overline{B})$.

Exercice 5.18. Soient A et B deux événements dont les probabilités sont données dans les tableaux ci-dessous.

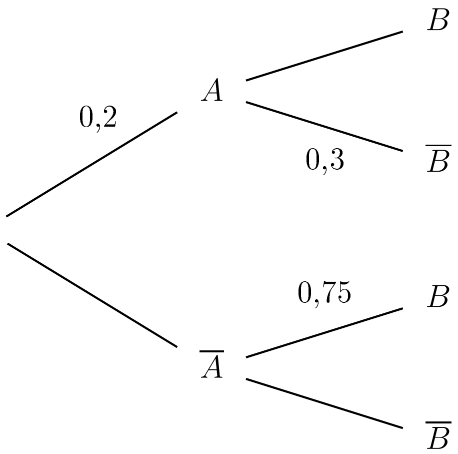
	A	$\overline{A}$	Total
B		0,25	
$\overline{B}$			0,4
Total	0,6		

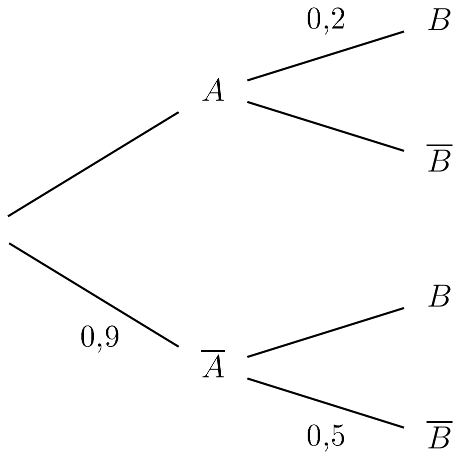
	A	$\overline{A}$	Total
B	0,45		0,9
$\overline{B}$			
Total		0,55	

Dans chacun des cas :

1. Recopier et compléter le tableau.
2. Calculer $\mathbb{P}_A(B)$ et $\mathbb{P}_B(A)$.

Exercice 5.19. Soient A et B deux événements.





Dans chacun des cas :

1. Reproduire et compléter l'arbre ci-dessus.
2. Calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$.
3. En déduire $\mathbb{P}(B)$.
4. Calculer $\mathbb{P}(\overline{B})$.

Exercice 5.20.

1. Sachant que A et B sont deux événements indépendants et que $\mathbb{P}(A) = \frac{2}{3}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$, calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.
2. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{7}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{7}$. A et B sont-ils indépendants.
3. Sachant que A et B sont deux événements indépendants de même probabilité et que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{25}$, calculer $\mathbb{P}(A)$.

Exercice 5.21.

1. Sachant que A et B sont deux événements indépendants et que $\mathbb{P}(A) = \frac{4}{9}$ et $\mathbb{P}(B) = \frac{3}{10}$, calculer $\mathbb{P}(A \cap B)$ puis $\mathbb{P}(\overline{A} \cap B)$.
2. Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{10}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{5}{12}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{7}$. A et B sont-ils indépendants.
3. Sachant que A et B sont deux événements indépendants de même probabilité et que $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{64}$, calculer $\mathbb{P}(A)$.

5.6 Attendus et savoir-faire

- Connaître les différentes règles de probabilités de la section rappel.
- Connaître et savoir utiliser la formule d'une probabilité conditionnelle (sachant que).
- Compléter, construire et lire un tableau de probabilités.
- Compléter, construire et lire un arbre de probabilités.
- Modéliser une situation par arbre ou un tableau de probabilités.
- Calculer une probabilité à partir d'un arbre ou d'un tableau.
- Connaître et utiliser la définition de l'indépendance de deux événements.
- Déterminer si deux événements sont indépendants ou pas.