Évaluation

Dérivation

Sujet A 03/12/2021

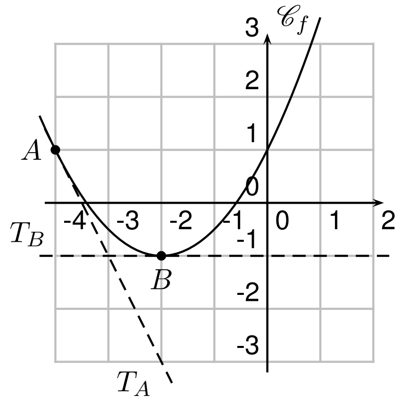
Note et remarques : /10

Instructions générales :

- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans la l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

Exercice 1. (/3)

On considère f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont on a la représentation graphique ci dessous. T_A est la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point A et T_B au point B.



1. Quel est le nombre dérivé de f en -2 ? en -4 ? Justifier.

Le nombre dérivé en -2 est le coefficient directeur de la tangente T_1 donc $f'(-2) = 0$. De même, $f'(-4)$ est le coefficient directeur de la tangente T_A, donc $f'(-4) = -2$.

2. Quelles sont les équations des tangentes T_A et T_B ?

L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point x_0 est

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Pour T_B, on a donc

$$y = 0(x - (-2)) + (-1) \iff y = -1.$$

Et pour T_A, on a

$$y = -2(x - (-4)) + 1 \iff y = -2x - 7.$$

Exercice 2. (/5)

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 - x + 7$ et $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative. Existe-t-il une tangente de $\mathscr{C}_f$ qui soit parallèle à la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = -2x - 1$?

Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux, or le coefficient directeur de la tangente de $\mathscr{C}_f$ en un point d'abscisse x est le nombre dérivé $f'(x)$. On veut donc résoudre $f'(x) = -2$. On va calculer $f'(x)$ pour un x quelconque. Pour cela, on calcule d'abord le taux d'accroissement puis on passe ensuite à la limite. Soient $x \in \mathbb{R}$ et $h \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \frac{-3(x+h)^2 - (x+h) + 7 - (3x^2 - x + 7)}{h} \\
&= \frac{3(x^2 + 2xh + h^2) - x - h + 7 - 3x^2 + x - 7}{h} \\
&= \frac{3x^2 + 6xh + 3h^2 - h - 3x^2}{h} \\
&= \frac{6xh + 3h^2 - h}{h} \\
&= 6x + 3h - 1 \\
&\underset{h \to 0}{\longrightarrow} 6x - 1.
\end{aligned}$$

On a donc $f'(x) = 6x - 1$. On va maintenant résoudre $6x - 1 = -2$; la solution est $x = -\dfrac{1}{6}$.

f admet donc une tangente parallèle à la droite $\mathscr{D}$ au point d'abscisse $-\dfrac{1}{6}$.

Exercice 3. (/2)

La fonction $f(x) = |x|$ définie sur $\mathbb{R}$ est-elle dérivable en 0 ? Justifier.

On calcule la limite du taux d'accroissement en 0 :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}.$$

Si $h > 0$ **:** $\dfrac{|h|}{h} = 1 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} 1.$

Si $h < 0$ **:** $\dfrac{|h|}{h} = -1 \underset{h \to 0}{\longrightarrow} -1.$

Les deux limites étant différentes, on en déduit que f n'est pas dérivable en 0.