Évaluation

Probabilités Conditionnelles

Sujet B 17/12/2021

Note et remarques : /10

Instructions générales :

- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. (/2)

1. Compléter le tableau de probabilité ci-contre sachant que :
- $\mathbb{P}(\overline{A}) = 0,3$;
- $\mathbb{P}(B) = 0,6$;
- $\mathbb{P}(A \cap B) = 0,5$.

	A	$\overline{A}$	Total
B	0,5	0,1	0,6
$\overline{B}$	0,2	0,2	0,4
Total	0,7	0,3	1

2. Calculer la probabilité de B sachant $\overline{A}$.

$$\mathbb{P}_{\overline{A}}(B) = \frac{\mathbb{P}(B \cap \overline{A})}{\mathbb{P}(\overline{A})} = \frac{0,1}{0,3} = \frac{1}{3}.$$

Exercice 2. (/2)

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Déterminer si les événements suivants sont indépendants : A « tirer une tête (roi, dame, valet) » et B « tirer une carte noire ».

A et B sont indépendants si et seulement si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

On a $\mathbb{P}(A) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$, $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$ et $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{6}{32} = \frac{3}{16}$ (probabilité de tirer une tête de pique ou de trèfle). On a donc

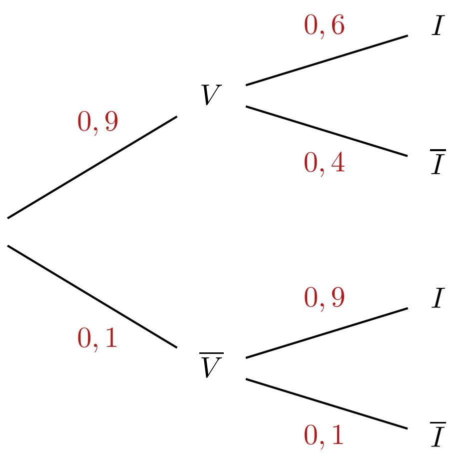
$$\mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B) = \frac{3}{8} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{16} = \mathbb{P}(A \cap B).$$

A et B sont donc indépendants.

Exercice 3. (/6)

Un virus se propage au sein d'une population qui tente de s'immuniser contre celui-ci à l'aide d'un vaccin. Environ 90% de la population est vaccinée et on estime qu'une fois vacciné, un individu à 60% de chance d'être infecté par le virus s'il est contact avec celui-ci alors que c'est 90% pour un individu non vacciné. On note :

- V l'événement « l'individu est vacciné » ;
- $\overline{V}$ l'événement « l'individu n'est pas vacciné » ;
- I l'événement « l'individu est infecté » ;
- $\overline{I}$ l'événement « l'individu n'est pas infecté ».



1. À l'aide des données de l'énoncé, compléter l'arbre ci-dessus.

2. Calculer la probabilité d'être vacciné et infecté par le virus.

Être vacciné et infecté par le virus est l'événement $V \cap I$, on a

$$\mathbb{P}(V \cap I) = \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(I) = 0,9 \times 0,6 = 0,54.$$

Il y a 63% de chances d'être vacciné et infecté par le virus.

3. Calculer la probabilité d'être infecté.

On a

$$\mathbb{P}(I) = \mathbb{P}(V \cap I) + \mathbb{P}(\overline{V} \cap I) = 0,54 + 0,1 \times 0,9 = 0,54 + 0,09 = 0,63.$$

Il y a 72% de chances d'être infecté.

4. Sachant qu'un individu n'est pas infecté, quelle est la probabilité qu'il soit vacciné ?

On souhaite donc calculer $\mathbb{P}_{\overline{I}}(V)$. Pour cela, calculons d'abord $\mathbb{P}(\overline{I}) = 1 - \mathbb{P}(I) = 0,37$. Calculons ensuite

$$\mathbb{P}(\overline{I} \cap V) = \mathbb{P}(V) \times \mathbb{P}_V(\overline{I}) = 0,9 \times 0,4 = 0,36.$$

On a donc

$$\mathbb{P}_{\overline{I}}(V) = \frac{\mathbb{P}(\overline{I} \cap V)}{\mathbb{P}(\overline{I})} = \frac{0,36}{0,37} \simeq 0,973.$$

Sachant qu'un individu n'est pas infecté, il y a 97,3% de chances soit vacciné.

5. En déduire la probabilité de ne pas être vacciné sachant que l'on n'est pas infecté.

On souhaite donc calculer $\mathbb{P}_{\overline{I}}(\overline{V})$. On a

$$\mathbb{P}_{\overline{I}}(\overline{V}) = 1 - \mathbb{P}_{\overline{I}}(V) = 1 - 0,973 = 0,027.$$

Il y a 2,7% de chances de ne pas être vacciné sachant que l'on n'est pas infecté.