

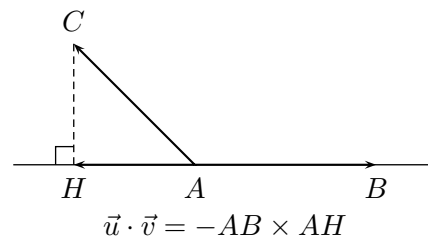
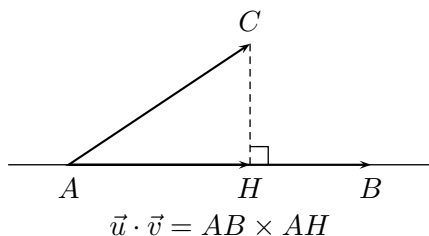
# Chapitre 7

## Produit scalaire dans le plan

### 7.1 Définition

**Définition 7.1.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. On appelle **produit scalaire** de  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  le nombre noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  et défini ci-dessous :

1. Si  $\vec{u} = \vec{0}$ , alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
2. Sinon, soient  $A, B, C$  trois points du plan tels que  $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$  et  $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ . On appelle  $H$  le projeté orthogonal de  $C$  sur  $(AB)$ .
  - (a) Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont de même sens, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = AB \times AH$ .
  - (b) Si  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont de sens contraire, alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -AB \times AH$ .



**Remarques :**

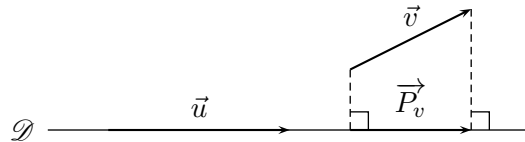
- La droite  $(OA)$  existe car  $\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$ .
- Le produit scalaire est aussi noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .
- On ne peut pas prendre les projetés de  $B$  et  $C$  sur une droite tierce. On doit soit projeter  $B$  sur  $(AC)$ , soit  $C$  sur  $(AB)$ .

★ Vidéo.

## 7.2 Autres Caractérisations

**Propriété 7.1.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan avec  $\vec{u} \neq \vec{0}$ . Soient  $\mathcal{D}$  une droite du plan dirigée par  $\vec{u}$  et  $\vec{P}_v$  le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur  $\mathcal{D}$ . Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{P}_v.$$

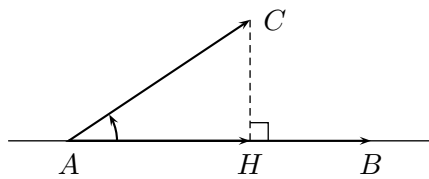


**Propriété 7.2.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan. Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}; \vec{v})).$$

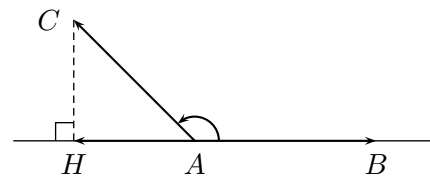
*Démonstration.* On reprend la configuration de la définition.

Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  sont de même sens :



$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= AB \times AH \\ &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}; \vec{v})) \end{aligned}$$

Si  $\vec{AB}$  et  $\vec{AH}$  sont de sens contraire :



$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= -AB \times AH \\ &= AB \times AC \times (-\cos(\widehat{HAC})) \\ &= AB \times AC \times \cos(\pi - \widehat{HAC}) \\ &= AB \times AC \times \cos(\widehat{BAC}) \\ &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos((\vec{u}; \vec{v})). \end{aligned}$$

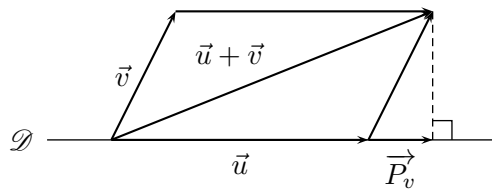
□

★ Vidéo.

**Propriété 7.3.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. On a :

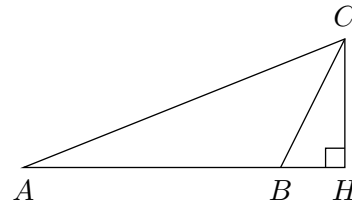
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

*Démonstration.* Si  $\vec{u} = \vec{0}$ , alors l'égalité désirée est immédiatement vérifiée. Sinon, on appelle  $\mathcal{D}$  une droite dirigée par  $\vec{u}$  et  $\vec{P}_v$  le projeté orthogonal de  $\vec{v}$  sur  $\mathcal{D}$ . Par commodité, on représente le cas où  $\vec{P}_v$  est de même sens que  $\vec{u}$ .



Soient  $A, B, C$  et  $H$  des points du plan tels que :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} \quad \vec{v} = \overrightarrow{BC} \quad \vec{P}_v = \overrightarrow{BH}.$$



Alors :

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 &= AC^2 \\ &= AH^2 + HC^2 \\ &= (AB + BH)^2 + HC^2 \\ &= [AB + BC \cos(\widehat{HBC})]^2 + [BC \sin(\widehat{HBC})]^2 \\ &= [\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| \cos((\vec{u}; \vec{v}))]^2 + [\|\vec{v}\| \sin((\vec{u}; \vec{v}))]^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos((\vec{u}; \vec{v})) + \|\vec{v}\|^2 \cos^2((\vec{u}; \vec{v})) + \|\vec{v}\|^2 \sin^2((\vec{u}; \vec{v})) \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 [\cos^2((\vec{u}; \vec{v})) + \sin^2((\vec{u}; \vec{v}))] \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

On déduit de cette dernière égalité la formule désirée. □

★ Vidéo.

**Propriété 7.4.** On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé. Soient les vecteurs du plan  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ . Alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

*Démonstration.* On a :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}, \quad [\vec{u} + \vec{v}] \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}.$$

Par application de la propriété précédente

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} [(x + x')^2 + (y + y')^2 - (x^2 + y^2) - (x'^2 + y'^2)] \\ &= \frac{1}{2} (2xx' + 2yy') \\ &= xx' + yy'. \end{aligned}$$

□

★ Vidéo.

## 7.3 Propriétés algébriques

**Propriété 7.5.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. On a :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$$

On dit que le produit scalaire est **commutatif**, ou **symétrique**.

*Démonstration.* Exercice (utiliser la propriété précédente). □

**Propriété 7.6.** Soient  $k$  un nombre réel et  $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$  trois vecteurs du plan.

1.  $k\vec{u} \cdot \vec{v} = k \times \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot k\vec{v}$  ;
2.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = \vec{u} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \vec{w}$  ;

*Démonstration.* Idem propriété précédente. □

## 7.4 Interprétation géométrique

**Propriété 7.7.** Soit  $\vec{u}$  un vecteur du plan. Alors :  $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ .

*Démonstration.* Exercice. □

**Propriété 7.8.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs non nuls du plan. Alors  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux si et seulement si  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .

*Démonstration.* Exercice. □

★ Vidéo.

## 7.5 Attendus et savoir-faire

- Connaître et utiliser les différentes caractérisations / propriétés du produit scalaire.
- Faire le lien entre produit scalaire et orthogonalité.

## 7.6 Exercices

### 7.6.1 Démarrage

**Exercice 7.1.** Soit  $ABCD$  un rectangle de longueur 2 et largeur 1. On note  $E, F, G$  et  $H$  les milieux respectifs de  $[AB], [BC], [CD]$  et  $[DA]$  ;  $O$  le milieu des diagonales du rectangle. Calculer les produits scalaires suivants.

- |                                |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|
| 1. $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ . | 4. $\vec{AB} \cdot \vec{AE}$ . | 7. $\vec{OE} \cdot \vec{OD}$ . |
| 2. $\vec{AB} \cdot \vec{AG}$ . | 5. $\vec{AO} \cdot \vec{AC}$ . | 8. $\vec{CD} \cdot \vec{OF}$ . |
| 3. $\vec{AB} \cdot \vec{BC}$ . | 6. $\vec{OF} \cdot \vec{OH}$ . | 9. $\vec{FB} \cdot \vec{AD}$ . |

**Exercice 7.2.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

1.  $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ .
2.  $\|\vec{u}\| = 1, \|\vec{v}\| = 3$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{-\pi}{6}$ .
3.  $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{-\pi}{2}$ .
4.  $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = \frac{1}{6}$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \pi$ .

**Exercice 7.3.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

1.  $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 5$ .
2.  $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = 2$ .

**Exercice 7.4.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer  $\vec{u} \cdot \vec{v}$ .

1.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ .
2.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ .
3.  $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ .
4.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 8 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 7.5.** Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  trois vecteurs du plan tels que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2, \vec{u} \cdot \vec{w} = -3, \vec{w} \cdot \vec{v} = 0, \|\vec{u}\| = 1, \|\vec{v}\| = 2$  et  $\|\vec{w}\| = 3$ . Calculer les produits scalaires ci-dessous.

1.  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w}$ .
2.  $(-2\vec{u}) \cdot \vec{w}$ .
3.  $(\vec{u} - 3\vec{v}) \cdot (2\vec{w})$ .
4.  $(-4\vec{u} + 5\vec{v}) \cdot (-2\vec{v} + 3\vec{w})$ .
5.  $\left(\frac{1}{3}\vec{u} + 5\vec{v}\right) \cdot \left(\vec{u} - \frac{1}{2}\vec{w}\right)$ .
6.  $(2\vec{u} + 5\vec{v} + \vec{w}) \cdot (\vec{v} + 6\vec{w})$ .

**Exercice 7.6.** Donner deux vecteurs orthogonaux à  $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ .

## 7.6.2 Approfondissement

**Exercice 7.7.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer  $\|\vec{u}\|$ .

1.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3, \|\vec{v}\| = 3$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ .
2.  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -2, \|\vec{v}\| = 3$  et  $(\vec{u}; \vec{v}) = \frac{5\pi}{6}$ .

**Exercice 7.8.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas déterminer toutes les mesures possibles de l'angle  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

1.  $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3\sqrt{3}$ .
2.  $\|\vec{u}\| = 1, \|\vec{v}\| = 3$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -3$ .
3.  $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = \frac{1}{2}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .
4.  $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = \frac{1}{6}$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

**Exercice 7.9. [\*]** Est-il possible d'avoir un produit scalaire de deux vecteurs de signe différent de celui de leur cosinus ?

**Exercice 7.10.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer  $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ .

1.  $\|\vec{u}\| = 2, \|\vec{v}\| = 3$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 10$ .
2.  $\|\vec{u}\| = 3, \|\vec{v}\| = 4$  et  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -6$ .

**Exercice 7.11.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

1.  $\|\vec{u}\| = 3$ ,  $\|\vec{v}\| = 4$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{13}$ .      2.  $\|\vec{u}\| = 2$ ,  $\|\vec{v}\| = 3$  et  $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{13 + 6\sqrt{2}}$ .

**Exercice 7.12. [Balistique,\*\*]** Un trébuchet lance un premier rocher à 400m puis effectue une rotation de 30 degrés avant d'en lancer un second à 500. Quelle est la distance entre les deux rochers ?

**Exercice 7.13.** Soient  $A(2; 1)$ ,  $B(4; 4)$  et  $C(0; 4)$  trois points du plan.

1. Montrer que  $ABC$  est isocèle en  $A$ .
2. Déterminer la mesure de l'angle  $(\vec{AB}; \vec{AC})$ .
3. En déduire la mesure de l'angle  $(\vec{BA}; \vec{BC})$ .

**Exercice 7.14.** Soient  $A(2; 2)$ ,  $B(4; 2)$  et  $C(3; 2 + \sqrt{3})$  trois points du plan.

1. Déterminer la mesure de l'angle  $(\vec{AB}; \vec{AC})$ .
2. Quelle est la nature du triangle  $ABC$  ?

**Exercice 7.15. [\*\*]** Soient  $ABC$  un triangle équilatéral de côté  $a$  et  $x \in ]0; 1[$ .  $M$ ,  $N$  et  $P$  sont trois points tels que

$$\vec{AM} = x\vec{AB}, \quad \vec{BN} = x\vec{BC} \quad \text{et} \quad \vec{CP} = x\vec{CA}.$$

1. Faire une figure représentant la situation.
2. Calculer  $AM$ ,  $AP$ ,  $\vec{AM} \cdot \vec{AP}$  puis  $MP$ .
3. En déduire la nature du triangle  $MNP$ .

**Exercice 7.16.** Soient  $ABC$  un triangle,  $I$  milieu de  $[BC]$  et  $H$  le pied de la hauteur issue de  $A$ .

1. Montrer que  $AC^2 - AB^2 = 2\vec{BC} \cdot \vec{AI}$ . *Indication* : on pourra utiliser en justifiant que  $\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$  et  $\vec{AI} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$ .
2. En déduire que  $AC^2 - AB^2 = -2\vec{BC} \cdot \vec{IH}$ .
3. Calculer  $IH$  pour  $AC = 4$ ,  $AB = 3$  et  $BC = 6$ .

**Exercice 7.17. [\*\*]** Soit  $ABC$  un triangle équilatéral et  $E$  et  $F$  deux points du plan tels que  $\vec{AE} = \frac{3}{2}\vec{BC}$  et  $\vec{BF} = \frac{1}{4}\vec{AC}$ . Montrer que  $\vec{AC} \cdot \vec{EF} = 0$ .

*Indication* : on pourra utiliser la relation  $\vec{EF} = \vec{EA} + \vec{AB} + \vec{BF}$ .

**Exercice 7.18.** Dans chaque cas, déterminer  $m$  pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux.

1.  $\vec{u} \begin{pmatrix} m-4 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2m \\ 3-m \end{pmatrix}$ .
2.  $\vec{u} \begin{pmatrix} 2-m \\ 5 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ m-1 \end{pmatrix}$ .

**Exercice 7.19. [\*\*]** Soient  $O$ ,  $A$  et  $B$  trois points du plan.

1. Construire  $A'$  le projeté orthogonal de  $A$  sur  $[OB]$  et  $B'$  le projeté orthogonal de  $B$  sur  $[OA]$ .
2. Montrer que l'on a  $\vec{OA} \cdot \vec{OB'} = \vec{OA'} \cdot \vec{OB}$ .

**Exercice 7.20. [\*\*\*]** Démontrer le théorème de Pythagore.

### 7.6.3 Entraînement

**Exercice 7.21.** Soit  $ABCD$  un rectangle de longueur 2 et largeur 1. On note  $E, F, G$  et  $H$  les milieux respectifs de  $[AB], [BC], [CD]$  et  $[DA]$ ;  $I$  le milieu des diagonales du rectangle. Calculer les produits scalaires suivants.

- |  |  |  |
|--|--|--|
| 1. $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BD}$ . | 4. $\overrightarrow{DH} \cdot \overrightarrow{DA}$ . | 7. $\overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{OA}$ . |
| 2. $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BO}$ . | 5. $\overrightarrow{DB} \cdot \overrightarrow{DO}$ . | 8. $\overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{OE}$ . |
| 3. $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CD}$ . | 6. $\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{OG}$ . | 9. $\overrightarrow{HC} \cdot \overrightarrow{FB}$ . |

**Exercice 7.22.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas déterminer toutes les mesures possibles de l'angle  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

- |   |  |
|---|--|
| 1. $\ \vec{u}\  = 12, \ \vec{v}\  = \frac{1}{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$ . | 3. $\ \vec{u}\  = 2, \ \vec{v}\  = \frac{1}{2}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ .                   |
| 2. $\ \vec{u}\  = 4, \ \vec{v}\  = 2$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = 8$ .            | 4. $\ \vec{u}\  = 3, \ \vec{v}\  = \frac{1}{6}$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$ . |

**Exercice 7.23.** Soient  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  deux vecteurs du plan. Dans chaque cas calculer  $(\vec{u}; \vec{v})$ .

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\ \vec{u}\  = 3, \ \vec{v}\  = 4$ et $\ \vec{u} + \vec{v}\  = 5$ . | 2. $\ \vec{u}\  = 2, \ \vec{v}\  = 3$ et $\ \vec{u} + \vec{v}\  = 1$ . |
|--|--|

**Exercice 7.24.** Dans chaque cas, déterminer la mesure de l'angle  $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$ .

- |   |  |
|---|--|
| 1. $A(1; 2), B(3; 2)$ et $C(\sqrt{3} + 1; 3)$ . | 2. $A(-1; 1), B(-1; 5)$ et $C(-\sqrt{2} - 1; -\sqrt{2} + 1)$ . |
|---|--|

**Exercice 7.25.** Dans chaque cas, déterminer  $m$  pour que  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  soient orthogonaux.

- |  |  |
|--|--|
| 1. $\vec{u} \begin{pmatrix} m-1 \\ 2m+1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} m+1 \\ m \end{pmatrix}$ . | 2. $\vec{u} \begin{pmatrix} m \\ 3-m \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -m \end{pmatrix}$ . |
|--|--|