Nom : **Prénom :** **Groupe : 1re Maths**

Évaluation

Fonction dérivée et application

Sujet A 21/01/2022

Note et remarques : /15

Instructions générales :

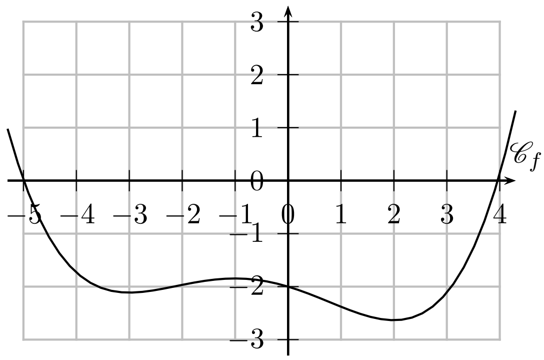
- *La rédaction est attendue claire et complète et prise en compte dans la l'évaluation.*
- *Des pénalités pourront être appliquées en cas de manque de soin.*
- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice est autorisée.*

Exercice 1. (/4)

Soit f la fonction définie par la courbe c-dessous. On admet qu'elle est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Donner les solutions de $f'(x) = 0$. Justifier

Les solutions sont les abscisses des points ayant une tangente horizontale : -3, -1 et 2.



2. Quel est le signe de $f'(-4)$? Justifier.

f est décroissante sur $[-5\,;-3]$ donc $f'(-4) \leq 0$.

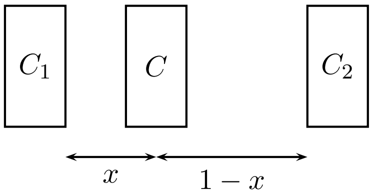
3. Comparer $f'(-2)$ et $f'(1)$. Justifier.

f est croissante sur $[-3\,;-1]$ donc $f'(-2) \geq 0$. Par ailleurs, f est décroissante sur $[-1\,;2]$ donc $f'(1) \leq 0$. On en déduit que $f'(-2) \geq f'(1)$.

Exercice 2. (/6)

Vous êtes ingénieur-e pour la Multinationale et celle-ci prévoit de commercialiser son nouveau iTruc Universe révolutionnaire afin de remplacer l'iTruc Galaxy de l'an dernier qui est devenu moins révolutionnaire. Vous travaillez sur l'architecture de la carte mère du nouvel iTruc et cherchez actuellement à placer un composant électronique entre deux autres de façon optimale. En effet, ce composant est sensible à la chaleur et les deux autres en émettent par effet Joule. Vous avez d'abord mis le composant au hasard entre les deux autres mais celui-ci a explosé, détruisant ainsi la moitié du labo nord. Heureusement, votre $n+1$ était trop occupé à faire semblant de préparer un PowerPoint pour son date de 22h et ne s'est aperçu de rien. Rectifier votre erreur en déterminant à quelle distance placer le composant des deux autres afin de minimiser la chaleur qu'il recevra puis réparer le labo nord et retourner voir votre $n+1$ pour 22h.

Le composant 1 émet deux fois plus de chaleur que le 2 et ils sont à une distance de 1μm l'un de l'autre. On note x la distance entre le composant 1 et celui que vous devez placer. Selon votre collègue de R&D, la chaleur reçue par votre composant est donnée par la fonction :



$$f(x) = \frac{2}{x} + \frac{1}{1-x}.$$

Vous avez des doutes sur la validité de ce modèle mais votre prof de physique n'est pas là pour vous aider. Vous allez devoir faire avec faute de mieux.

Il s'agit de trouver le minimum de f. Pour cela, on va la dériver puis étudier le signe de sa dérivée afin d'en déduire ses variations et ses éventuels extremums. f est définie et dérivable sur $]0\,;1[$.

$\frac{1}{1-x}$ est de la forme $\frac{1}{v}$ donc $\left(\frac{1}{1-x}\right)'$ sera de la forme $-\frac{v'}{v^2}$. On a donc pour tout $x \in]0\,;1[$,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= -\frac{2}{x^2} - \frac{-1}{(1-x)^2} \\
&= -\frac{2(1-x)^2}{x^2(1-x)^2} + \frac{x^2}{x^2(1-x)^2} \\
&= \frac{-2(1-x)^2 + x^2}{x^2(1-x)^2} \\
&= \frac{-2+4x-2x^2+x^2}{x^2(1-x)^2} \\
&= \frac{-x^2+4x-2}{x^2(1-x)^2}.
\end{aligned}$$

Le dénominateur de f' est clairement positif. f' est donc du signe de son numérateur, lequel est un polynôme de degré deux. On va calculer son déterminant afin de trouver son signe. On a

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-1) \times (-2) = 8.$$

Le discriminant est positif, on a donc deux racines :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{8}}{-2} = 2 \mp \sqrt{2}.$$

Seul $2 - \sqrt{2} \in]0\,;1[$, en effet $2 + \sqrt{2} > 1$. Comme $a = -1 < 0$, on a

x	0		$2-\sqrt{2}$		1
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$f(2-\sqrt{2})$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

f admet donc un minimum en $2 - \sqrt{2} \simeq 0,5858$. Il faut donc placer le composant à $0,5858\mu$m du premier composant afin de minimiser la chaleur qu'il recevra.

Exercice 3. (/5)

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_n = (36-2n)\sqrt{n}$.

1. Calculer les deux premiers termes de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

On a $u_0 = (36-2\times 0)\sqrt{0} = 0$ et $u_1 = (36-2\times 1)\sqrt{1} = 34$.

On pose f la fonction définie par $f(x) = (36-2x)\sqrt{x}$.

2. Donner les domaines de définitions et dérivation de f puis montrer que $f'(x) = \dfrac{18-3x}{\sqrt{x}}$.

f est définie sur $\mathbb{R}_+$ et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est de la forme uv donc sa dérivée est de la forme $u'v+uv'$. Pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2\sqrt{x} + \frac{36-2x}{2\sqrt{x}} \\ &= \frac{-2x}{\sqrt{x}} + \frac{18-x}{\sqrt{x}} \\ &= \frac{18-3x}{\sqrt{x}}. \end{aligned}$$

3. Quelles sont les variations de f ?

Comme $\sqrt{x} > 0$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$, on en déduit que f' est du signe de $18-3x$. On a $18-3x \geq 0$ si et seulement si $x \leq 6$, donc

x	0		6		$+\infty$
$f'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$24\sqrt{6}$	$\searrow$	$-\infty$

4. En déduire les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Est-elle majorée, minorée, bornée ?

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les mêmes variations que f puisque $u_n = f(n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Elle est donc croissante jusqu'à $n=6$ puis décroissante. Elle est majorée par le maximum de f : $24\sqrt{6}$ mais pas minorée et donc non bornée.