NOM : **Prénom :** **Groupe : 2$^{\text{de}}$ 7**

Évaluation

Vecteurs et variations de fonctions

Sujet A 19/01/2022

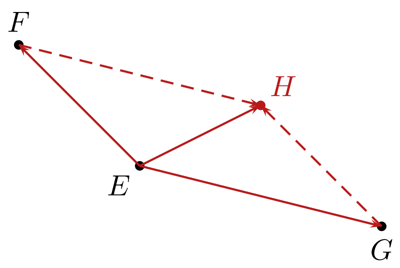
A : /4 ; C : /4 ; D : /3 ; E1 : /4 ; Total : /15

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

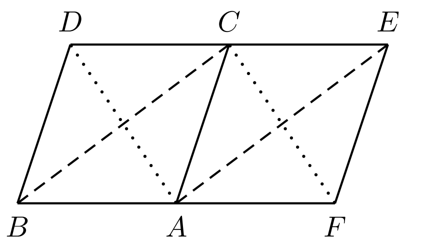
Exercice 1.

Construire le point H tel que $\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EH}$. On laissera apparent les traits de construction.



Exercice 2.

Sur la figure ci-contre, les quadrilatères $ABDC$, $FACE$, $FADC$ et $ABCE$ sont des parallélogrammes. Remplacer les sommes vectorielles suivantes par un unique vecteur.



1. $\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BD}$.

$\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE}$.

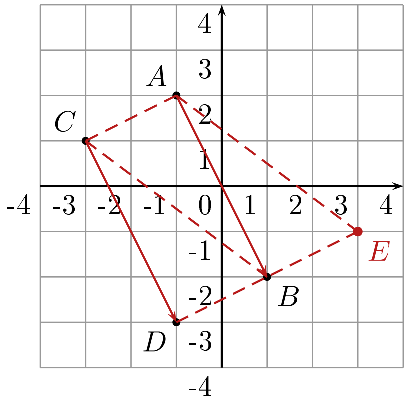
2. $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB}$.

$\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BD} = \vec{0}$.

3. $2\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$.

$2\overrightarrow{EC} - \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EF}$.

Exercice 3.



Soient A, B, C et D quatre points du plan représentés ci-contre.

1. Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a
$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.

Par lecture graphique, on trouve
$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

3. Calculer les coordonnées du point E tel que $AEBC$ soit un parallélogramme.

$AEBC$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BE}$. On a $\overrightarrow{CA}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. On note $(x_E\,;y_E)$ les coordonnées de E, on a $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x_E - x_B \\ y_E - y_B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - 1 \\ y_E + 2 \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{cases} x_E - 1 = 2, \\ y_E + 2 = 1, \end{cases} \iff \begin{cases} x_E = 3, \\ y_E = -1. \end{cases}$$

Exercice 4.

Soient $A\,(3\,;-1)$, $B\,(0\,;4)$ et $C\,(-2\,;2)$ trois points du plan.

1. Calculer les coordonnées de $\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C-x_A \\ y_C-y_A \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2-3 \\ 2-(-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}$ et de même $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\left[\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}\right]\begin{pmatrix} \frac{1}{4}\times(-5)-\frac{1}{2}\times(-2) \\ \frac{1}{4}\times 3-\frac{1}{2}\times(-2) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les coordonnées du point M définie par $\overrightarrow{CM}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

Soit $M\,(x\,;y)$, on a $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-2 \end{pmatrix}$. Puisque deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales, on a

$$\begin{cases} x+2=-\frac{1}{4}, \\ y-2=\frac{7}{4}, \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{9}{4}, \\ y=\frac{15}{4}. \end{cases}$$

Exercice 5. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-8		-3		-2		1		2		7
$f(x)$	-5	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	3	$\searrow$	1	$\nearrow$	4

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? $[-8\,;7]$.

2. Quel est l'image de 1 par f ? 3.

3. Quels sont les éventuels antécédents de -1 par f ? -3.

4. Quel est le maximum de f sur son ensemble de définition ? 4 atteint en 7.

5. Quel est le maximum de f sur $[-8\,;-2]$? -1 atteint -3.

6. Lorsque $x \in [1\,;7]$, $1 \leq f(x) \leq 4$.

7. « $f(x) \geq 0$ pour $x \in [1\,;7]$ », vrai ou faux ? Justifier.

Vrai, f a pour minimum 1 sur $[1\,;7]$, elle est donc bien positive.

8. Comparer $f(-5)$ et $f(-4)$. Justifier.

f est croissante sur $[-8\,;-3]$ donc $f(-5) \leq f(-4)$.

9. Comparer $f(-6)$ et $f(3)$. Justifier.

f est croissante sur $[-8\,;-3]$ donc $f(-6) \leq f(-3) = -1$. Par ailleurs, f est croissante sur $[2\,;7]$ donc $1 = f(2) \leq f(3)$. On a donc

$$f(-6) \leq -1 \leq 1 \leq f(3).$$