Nom : **Prénom :** **Groupe : 2$^{\text{de}}$ 7**

Évaluation

Vecteurs et variations de fonctions

Sujet B 19/01/2022

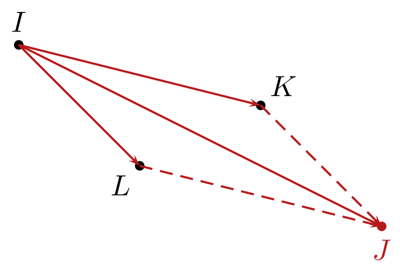
A : /4 ; C : /4 ; D : /3 ; E1 : /4 ; Total : /15

Instructions générales :

- *Les exercices sont indépendants les uns des autres.*
- *La calculatrice n'est pas autorisée.*

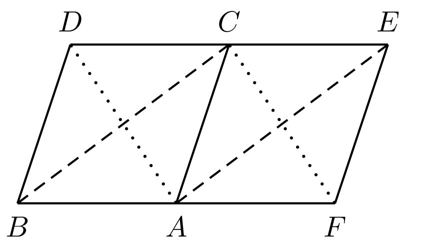
Exercice 1.

Construire le point J tel que $\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{IL}=\overrightarrow{IJ}$. On laissera apparent les traits de construction.



Exercice 2.

Sur la figure ci-contre, les quadrilatères $ABDC$, $FACE$, $FADC$ et $ABCE$ sont des parallélogrammes. Remplacer les sommes vectorielles suivantes par un unique vecteur.



1. $\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EF}$.

$\overrightarrow{EC}+\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{EA}$.

2. $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}$.

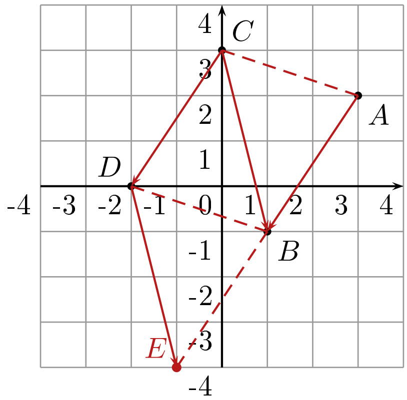
$\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{BF}$.

3. $2\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$.

$2\overrightarrow{FA}-\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{FC}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{FF}=\vec{0}$.

Exercice 3.

Soient A, B, C et D quatre points du plan représentés ci-contre.



1. Lire les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

On a

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

2. Quelle est la nature du quadrilatère $ABDC$? Justifier.

Par lecture graphique, on trouve

$$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Donc $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, on en déduit que $ABDC$ est un parallélogramme.

3. Calculer les coordonnées du point E tel que $CBED$ soit un parallélogramme.

$CBED$ est un parallélogramme si et seulement si $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DE}$. On a $\overrightarrow{CB}\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$. On note $(x_E\,;y_E)$ les coordonnées de E, on a $\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} x_E - x_D \\ y_E - y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_E - (-2) \\ y_E \end{pmatrix}$. On en déduit que

$$\begin{cases} x_E + 2 = 1, \\ y_E = -4, \end{cases} \iff \begin{cases} x_E = -1, \\ y_E = -4. \end{cases}$$

Exercice 4.

Soient $A\,(0\,;1)$, $B\,(-3\,;3)$ et $C\,(4\,;2)$ trois points du plan.

1. Calculer les coordonnées de $\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3-0 \\ 3-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ et de même $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}$. On a donc

$$\left[\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}\right]\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\times(-3)-7 \\ \frac{1}{2}\times 2-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{17}{2} \\ 2 \end{pmatrix}.$$

2. En déduire les coordonnées du point M définie par $\overrightarrow{BM}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$.

Soit $M\,(x\,;y)$, on a $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-3 \end{pmatrix}$. Puisque deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales, on a

$$\begin{cases} x+3=-\dfrac{17}{2}, \\ y-3=2, \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\dfrac{23}{2}, \\ y=5. \end{cases}$$

Exercice 5. On donne ci-dessous le tableau de variation d'une fonction f.

x	-5	-3	-1	2	4	9
$f(x)$	-5 ↘	-10 ↗	-2 ↘	-3 ↗	5 ↘	0

1. Quel est l'ensemble de définition de f ? $[-5\,;9]$.

2. Quel est l'image de -3 par f ? -10.

3. Quels sont les éventuels antécédents de -3 par f ? 2.

4. Quel est le minimum de f sur son ensemble de définition ? -10 atteint en -3.

5. Quel est le minimum de f sur $[-1\,;9]$? -3 atteint 2.

6. Lorsque $x \in [-5\,;-1]$, $-10 \leq f(x) \leq -2$.

7. « $f(x) \leq 0$ pour $x \in [-5\,;2]$ », vrai ou faux ? Justifier.

Vrai, f a pour maximum -2 sur $[-5\,;2]$, elle est donc bien négative.

8. Comparer $f(5)$ et $f(7)$. Justifier.

f est décroissante sur $[4\,;9]$ donc $f(5) \geq f(7)$.

9. Comparer $f(-4)$ et $f(6)$. Justifier.

f est décroissante sur $[-5\,;-3]$ donc $f(-4) \leq f(-5) = -5$. Par ailleurs, f est décroissante sur $[4\,;9]$ donc $0 = f(9) \leq f(6)$. On a donc

$$f(-4) \leq -5 \leq 0 \leq f(6).$$